Exercice 88

1. *cf* **3. c**

2. $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ pour tout x réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et $f'(x) = -2x + 4$.

Méthode

- Pour dériver une somme, on utilise les propriétés **2**, **3** et **4**.

3. a. $f'(x) = -2x + 4$
donc pour $x = 0$, $f'(0) = -2 \times 0 + 4 = 4$.
De même pour $x = 3$, $f'(3) = -2 \times 3 + 4 = -2$.

Méthode

Pour calculer $f'(0)$ lorsque l'on connait $f'(x)$, on remplace x par 0.

b. $f'(0)$ et $f'(3)$ sont les coefficients directeurs des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et 3.

3. c. Le point A a pour coordonnées (0 ; f(0)) soit A(0 ; 3).
La tangente d en A à la courbe C a pour équation réduite $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = 4x + 3$.
B est le point de C d' abscisse 3 d'où B $\left(3\,;f(3)\right)$, soit B (3 ; 6).

Méthode

On utilise la propriété **1** :
L'équation réduite de la tangente en A d'abscisse a est
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

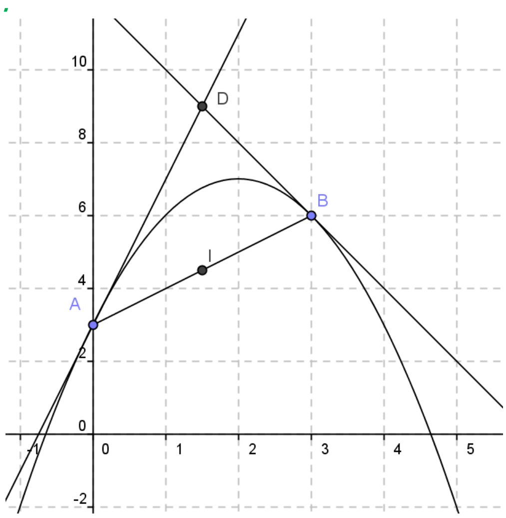
La tangente d' à C en B a pour coefficient directeur $f'(3) = -2$ (d'après **3.a.**) donc l'équation réduite de d' est $y = -2x + b$, où b est un réel à déterminer.
Or B (3 ; 6) appartient à d' donc les coordonnées de B vérifient l'équation de $y = -2x + b$ d'où
$6 = -2 \times 3 + b$ donc $b = 12$ et d' : $y = -2x + 12$.

Soit D (x_D ; y_D) le point d'intersection de d et d'.
le couple (x_D ; y_D) est solution du système

$$\begin{cases} y = 4x + 3 \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x + 3 \\ 4x + 3 = -2x + 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = -2 \times 1{,}5 + 12 = 9 \end{cases}$$

Donc D a pour coordonnées (1,5 ;9).



d. $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+3}{2} = 1{,}5$ qui est l'abscisse du milieu I de [AB].

Conseil

On contrôle graphiquement les résultats des questions **c** et **d**.

4. Généralisation

Soit $\mathrm{A}(a, f(a))$ et $\mathrm{B}(b, f(b))$.

a. La tangente en A à C a pour équation réduite

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$\quad = (-2a + 4)(x - a) + (-a^2 + 4a + 3)$

d'où $y = (-2a + 4)x + a^2 + 3$.

b. De même la tangente en A à C a pour équation réduite $y = (-2b + 4)x + b^2 + 3$.

Le point d'intersection de ces deux tangentes vérifie le système :

$$\begin{cases} y = (-2a + 4)x + a^2 + 3 \\ y = (-2b + 4)x + b^2 + 3 \end{cases}$$

équivaut successivement à

$$\begin{cases} y = (-2a + 4)x + a^2 + 3 \\ (-2a + 4)x + a^2 + 3 = (-2b + 4)x + b^2 + 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (-2a + 4)x + a^2 + 3 \\ (-2a + 2b)x = +b^2 - a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (-2a + 4)x + a^2 + 3 \\ x = \frac{a + b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -ab + 2a + 2b + 3 \\ x = \frac{a+b}{2} \end{cases}.$$

Or le milieu de [AB] a pour abscisse $\frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{a + b}{2}$.

Donc le point d'intersection des tangentes à C en A et B a même abscisse que le milieu de [AB].