Exercice 99

Méthode

On « décortique » la fonction à étudier pour pouvoir utiliser le sens de variation des fonctions de référence et les propriétés vues dans ce chapitre.

a. On a l'enchaînement suivant :

$u : x \mapsto \sqrt{x}$

×(-6)

$-6u : \mapsto -6\sqrt{x}$

+2

$-6u + 2 : x \longmapsto 2 - 6\sqrt{x} = f(x)$

- La fonction $u: x \mapsto \sqrt{x}$ sur [0 ; + ∞[est strictement croissante sur [0 ; + ∞[.
- On multiplie par – 6 :
$-6u : x \mapsto -6\sqrt{x}$ a le sens de variation contraire à celui de u.
- On ajoute 2 :
$f = -6u + 2 : x \mapsto 2 - 6\sqrt{x}$ a même sens de variation que $-6u$.

Donc f est strictement décroissante sur [0 ; + ∞ [.

b. On a l'enchaînement suivant :

$u : x \mapsto \frac{1}{x}$

×(-2)

$-2u : \mapsto -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$

+3

$-2u + 3 : x \longmapsto 3 - \frac{2}{x} = f(x)$

Comme dans la question **a.**, f a donc le sens de variation contraire à celui de u.
Donc f est strictement croissante sur]– ∞ ;0[et sur] 0 ; + ∞[.

c. On a l'enchaînement suivant :

$u : x \mapsto |x|$

×3

$3u : \mapsto 3|x|$

–1

$3u - 1 : x \longmapsto 3|x| - 1 = f(x)$

$3u$ a même sens de variation que f car 3 > 0.
$3u - 1$ a même sens de variation que $3u$.

Donc f a même sens de variation que u :
f est strictement décroissante sur]– ∞ ;0] et strictement croissante sur [0 ; + ∞[.

. $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = -x + 3$.

On a donc le tableau suivant :

x	-∞		3		+∞
$u(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	
$\frac{1}{u(x)}$		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$.

e. $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x - 3$.
D'où le tableau suivant :

x	-∞		3		+∞
$u(x)$		négatif $\nearrow$	0	positif $\nearrow$	
$\sqrt{u(x)}$			0	$\nearrow$	

f est strictement croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $\frac{1}{u}$, il faut étudier celui de la fonction u mais aussi chercher où elle s'annule.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $\sqrt{u}$, il faut étudier celui de la fonction u mais aussi étudier son signe pour ne garder que les intervalles où $u(x) \geq 0$.