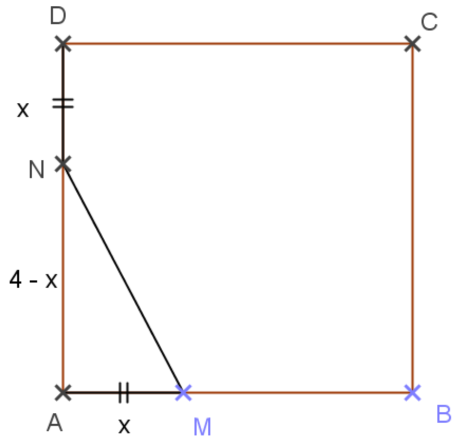
Exercice 101

On commence par faire une figure,
éventuellement sur un logiciel de géométrie.



1. Comme M appartient à [AB] avec AB = 4,
l'ensemble de définition de f est [0 ; 4].

2. Dans le triangle AMN rectangle en A,
$MN^2 = AM^2 + AN^2 = x^2 + (4-x)^2$.
Donc $f(x) = \sqrt{x^2 + (4-x)^2}$
ou encore $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$.

3. On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec
$u(x) = 2x^2 - 8x + 16$. La fonction u est une fonction polynôme de degré 2. Elle change de variation en $-\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$; le coefficient du terme en x^2 étant positif, on obtient ce tableau de variation :

x	0	2	4
$u(x)$	16 ↘	8	↗ 16
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	4 ↘	$\sqrt{8}$	↗ 4

4. MN est minimale pour $x = 2$ c'est-à-dire quand M et N sont les milieux de [AB] et [AD].

5. La distance MN minimale est égale à
$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $\sqrt{u}$, sur son ensemble de définition, on étudie d'abord le sens de variation de u.

Conseils

On peut vérifier certains résultats :

- Pour $x = 0$, M est en A et N est en D donc MN = AD = 4.
- Pour $x = 4$, M est en B et N est en A donc MN = BA = 4.
- La distance minimale MN est obtenue quand M et N sont les milieux de [AB] et [AD].

On peut la calculer par le théorème des milieux dans le triangle ABD : elle est égale à $\frac{1}{2}\text{BD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$