Exercice 100

1. On transforme $2-\frac{8}{x+2}$:

$2-\frac{8}{x+2}=\frac{2(x+2)-8}{x+2}=\frac{2x-4}{x+2}$

Donc $f(x)=\frac{2x-4}{x+2}$ pour tout $x\neq -2$.

Autre solution :

On aurait aussi pu transformer $\frac{2x-4}{x+2}$ en faisant apparaître $x+2$ au numérateur pour pouvoir décomposer cette écriture fractionnaire.

On cherche une écriture de la forme

$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{\dots(x+2)+\dots}{x+2}$

On ajuste le premier coefficient pour que le terme en x au numérateur soit égal à $2x$:

$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{2(x+2)+\dots}{x+2}$

Puis on ajuste la constante pour que le numérateur soit bien égal à $2x-4$

$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{2(x+2)+(-8)}{x+2}=\frac{2(x+2)-8}{x+2}$

On décompose ensuite en deux parties :

$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}-\frac{8}{x+2}=2-\frac{8}{x+2}$ pour tout $x\neq -2$.

Cette méthode est intéressante quand le résultat n'est pas donné !

2. On prend $x\neq -2$.

$f(x)=2-8\times\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=x+2$.

Pour obtenir f, on multiplie donc $\frac{1}{u}$ par – 8 (ce qui change le sens de variation) puis on ajoute 2 (ce qui ne change pas le sens de variation).

Donc f a le sens de variation contraire à celui de la fonction $\frac{1}{u}$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$u(x)$		↗	0	↗	
$\frac{1}{u(x)}$		↘	‖	↘	
$f(x)$		↗	‖	↗	

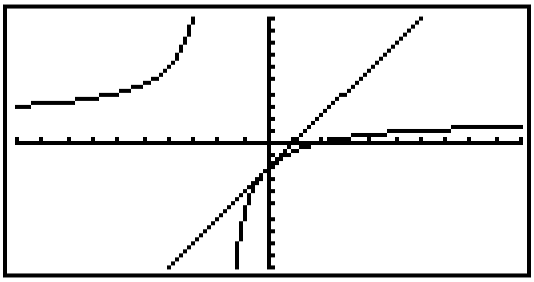
f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$.

Méthode

Pour démontrer une égalité, on peut :

- transformer le membre de gauche pour arriver à celui de droite
- transformer le membre de droite pour arriver à celui de gauche (ce qui est plus simple ici dans la question 1)
- transformer les deux membres pour montrer qu'ils sont égaux à une même troisième expression
- transformer la différence pour montrer qu'elle est nulle.

3. a. Il semble que $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d d'équation $y = 2x - 2$ sur $]-\infty\,;-2[$ et en dessous sur $]-2\,;+\infty[$.



b. On étudie le signe de la différence

$$f(x) - (2x-2) = \frac{2x-4}{x+2} - (2x-2)$$

$$f(x) - (2x-2) = \frac{2x-4-(x+2)(2x-2)}{x+2}$$

$$f(x) - (2x-2) = \frac{-2x^2}{x+2}.$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $-2x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x) - (2x-2)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	

Sur $]-\infty\,;-2[$, $f(x) - (2x-2) > 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 2x - 2$.
Sur $]-2\,;+\infty[$, $f(x) - (2x-2) \leq 0$ donc $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite d'équation $y = 2x - 2$ sauf au point d'abscisse 0 où ces courbes sont sécantes.

Méthode

Pour étudier la position respective de deux courbes représentant des fonctions f et g, on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$ (ou $g(x) - f(x)$).
Si, sur un intervalle I, on a $f(x) - g(x) > 0$, ceci signifie que $f(x) > g(x)$ donc que la courbe représentant f est au-dessus de celle de g sur cet intervalle.

Pour étudier ce signe, on peut avoir recours à un tableau de signe si l'expression est sous la forme d'un produit ou d'un quotient.

Remarque :
On pouvait éviter ici de faire un tableau de signes car $-2x^2$ est toujours négatif ou nul donc $f(x) - (2x-2)$ a le signe opposé à celui de $x + 2$.

4. Par exemple avec le logiciel Xcas on utilise l'instruction partfrac :

```
1 partfrac((2x-4)/(x+2))
  2-8/(x+2)
```

Avec une TI 89 ou une TI Voyage 200, on utilise l'instruction propFrac :