Exercice 93

Une animation est disponible sur le site.

1. Comme AB < BC, pour pouvoir construire M, N, P et Q, il faut et il suffit que la longueur AM, en cm, soit comprise entre 0 et 3.
Donc x appartient à [0 ; 3] et l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$ est [0 ; 3].

Méthode

L'aire d'un triangle est donnée par la formule :

$\frac{Base \times Hauteur}{2}$.

2. $\mathcal{A}(x)$ est égale à l'aire du rectangle ABCD à laquelle on retranche les aires des triangles rectangles MBN, QDP, NCP et MAQ.
MB = $3 - x$; BN = x ; NC = $5 - x$; CP = $3 - x$;
DP = x ; DQ = x et AQ = $5 - x$.
Par conséquent,
MBN et PDQ ont la même aire $\frac{1}{2}x(3 - x)$
et NCP et QAM ont la même aire $\frac{1}{2}x(5 - x)$.
On en déduit que :

$$\mathcal{A}(x) = 15 - 2 \times \frac{1}{2}(5 - x)x - 2 \times \frac{1}{2}x(3 - x)$$
$$\mathcal{A}(x) = 15 - (5 - x)x - x(3 - x)$$
$$\mathcal{A}(x) = 15 - (5x - x^2) - (3x - x^2)$$
$$\mathcal{A}(x) = 15 - 5x + x^2 - 3x + x^2$$
$$\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$$

3. a. On cherche x tel que $\mathcal{A}(x) = 9$
c'est-à-dire x dans l'intervalle [0 ; 3] tel que
$2x^2 - 8x + 15 = 9$.
$2x^2 - 8x + 15 = 9$ s'écrit aussi :
$2x^2 - 8x + 6 = 0$
ou encore : $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation de degré 2, on se ramène à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Il s'agit d'une équation de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = 3$.

Comme x_1 et x_2 appartiennent bien à [0 ; 3], il y a deux positions de M telles que l'aire de MNPQ soit égale à 9 cm^2 : M à 1 cm de A sur [AB] ou M à 3cm de A sur [AB], c'est-à-dire en B.

Conseil

Quant on résout une équation $f(x) = k$, il faut bien penser à vérifier que les solutions obtenues par le calcul appartiennent à l'ensemble de définition de la fonction f. De même pour une inéquation $f(x) < k$.

b. On cherche x tel que $\mathcal{A}(x) \leq 9$.
On a donc à résoudre $2x^2 - 8x + 15 \leq 9$ soit
$2x^2 - 8x + 6 \leq 0$.
$2x^2 - 8x + 6$ est un trinôme dont le coefficient de x^2 est positif et qui a pour racines 1 et 3 (par la question **a**). Il est donc positif sauf entre ses racines.
On a donc $2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1\,;3]$.
Comme]1 ; 3[est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$, on en déduit que MNPQ a une aire inférieure ou égale à 9 cm^2 si et seulement si x appartient à [1 ; 3].
(Si on a résolu $(x) < 9$, l'ensemble des solutions est]1 ; 3[).

Méthode

Pour résoudre une inéquation de degré 2, on se ramène à l'étude du signe d'un trinôme de degré 2 :
voir exercice résolu 6 page 29.

c. La fonction $\mathcal{A}$ est une fonction polynôme de degré 2 et le coefficient de x^2 est positif.
Donc $\mathcal{A}$ est strictement décroissante sur
$]-\infty\,; -\frac{b}{2a}]$ et strictement croissante sur
$[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.
On calcule $-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2$ et on en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		2		3
$\mathcal{A}(x)$	15	$\searrow$	7	$\nearrow$	9

d. On déduit du sens de variation de $\mathcal{A}$ que :
- l'aire maximale de MNPQ est 15 cm^2, obtenue pour $x = 0$ c'est-à-dire quand M est en A ;
- l'aire minimale de MNPQ est 7 cm^2, obtenue quand M est à 2 cm de A sur [AB].

Conseil

On vérifie que le sens de variation est cohérent avec les valeurs de $\mathcal{A}(x)$ placées dans la deuxième ligne du tableau.

On peut contrôler graphiquement les cordonnées du sommet S (2 ; 7) en traçant la courbe d'équation $y = -2x^2 - 8x + 15$ sur la calculatrice.