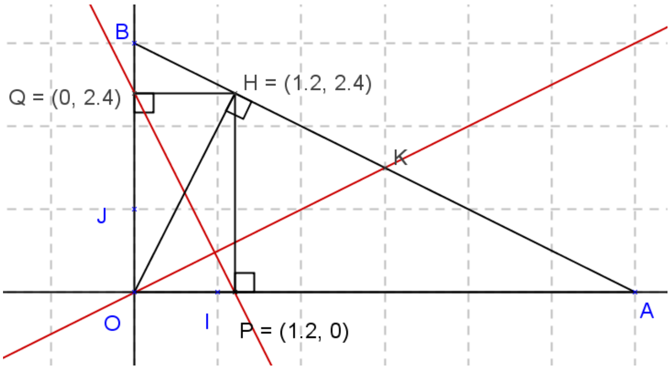
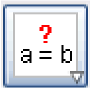
Exercice 128

Partie A.

1. Il semble que les droites (PQ) et (OK) soient orthogonales.



Conseils

Sur GeoGebra, on peut tester une relation entre les droites (PQ) et (OK) grâce à l'outil 

: cliquer sur cette icône puis sur chacune des deux droites.

2. a. (AB) a pour ordonnée à l'origine $y_{\mathrm{B}} = 3$ et pour coefficient directeur $\dfrac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

Donc (AB) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

La droite (OH) a pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$ ou aussi bien $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ soit $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Donc M$(x\,;y)$ appartient à (OH) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \vec{n} = 0$ soit $x \times (-2) + y \times 1 = 0$.

Donc (OH) admet pour équation cartésienne $-2x + y = 0$.

b. Les coordonnées de H vérifient les équations des deux droites : $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ -2x - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \end{cases}$

On en déduit que H a pour coordonnées $\left(\frac{6}{5}\,;\frac{12}{5}\right)$.

Méthode

Pour écrire une équation de la droite (AB), on peut chercher une équation cartésienne (comme au chapitre **10** en utilisant la condition de colinéarité), ou une équation réduite.
Ici l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) étant connue, on a privilégié l'équation réduite.

3. Le repère étant orthonormé on a P $\left(\frac{6}{5}\,;0\right)$ et Q $\left(0\,;\frac{12}{5}\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\[4pt]\frac{12}{5}\end{pmatrix}$.

K étant le milieu de [AB], on a K $\left(\frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2}\,;\frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}\right)$

donc K $\left(3\,;\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OK}}\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Par conséquent $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OK}} = -\frac{6}{5} \times 3 + \frac{12}{5} \times \frac{3}{2} = 0$.

Les droites (PQ) et (OK) sont donc orthogonales.

Partie B.

1. Première expression :

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ car H est le projeté orthogonal de O sur (AB) donc les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Deuxième expression :

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ car OPHQ est un rectangle

donc $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}).\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}$

Or $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AO}$ car O est le projeté orthogonal de B sur (OP)

et $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$ car O est le projeté orthogonal de A sur (OQ).

On en déduit que

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$

Conclusion

De $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$, on déduit alors que

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB} = 0$ donc

$-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

autrement dit $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$.

2. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$ s'écrit aussi

$(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ})\cdot\overrightarrow{OB}$

soit

$\underbrace{\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}}_{=0} + \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA} = \underbrace{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}}_{=0} + \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB}$

On a donc $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OB}$

Par suite, $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

soit $\overrightarrow{QP}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$.

Comme K est le milieu de [AB],

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{OK}$$

Donc $\overrightarrow{QP}\cdot 2\overrightarrow{OK} = 0$ ce qui revient à $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OK} = 0$.

Les droites (QP) et (OK) sont donc orthogonales.

Méthode

- Il faut se laisser guider par l'énoncé et le résultat que l'on veut obtenir. Pour obtenir la relation finale, il faut faire disparaître le point H et faire apparaître les points P et Q ; on utilise donc la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.
- On aurait aussi pu décomposer $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ pour démontrer cette relation au lieu d'utiliser les projetés orthogonaux.

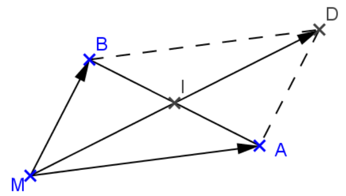
Méthode

Ici aussi, on se laisse guider par le résultat à obtenir en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Conseil

La relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, vraie pour tout point M, où I est le milieu de [AB] est très utile. Elle permet d'écrire directement ici l'égalité $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OK}$.

On peut la retrouver et la retenir géométriquement :



$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$ où ABDC est un parallélogramme.

Le milieu I de [AB] est donc aussi le milieu de [MD] d'où $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$.