Exercice 126

1. Un point M $(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Or $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}9-x\\3-y\end{pmatrix}$.

Donc M $(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si
$(1-x)(9-x)+(1-y)(3-y)=0$
soit
$x^2+y^2-10x-4y+12=0.$
Le cercle $\mathcal{C}$ a donc pour équation
$x^2+y^2-10x-4y+12=0.$

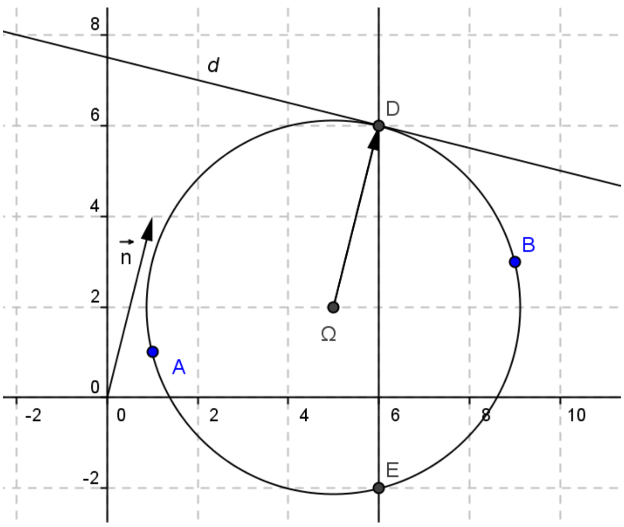
Méthode

Pour déterminer une équation de cercle on dispose de deux méthodes : voir exercice résolu **5** page 315.
Quand on connaît un diamètre du cercle, l'utilisation de la propriété **6** page 314 est la méthode la plus rapide.

2. On cherche les points de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2-10x-4y+12=0$ **et** $x=6$.
On résout donc (E) : $y^2-4y-12=0$.
Le discriminant de $y^2-4y-12$ est
$\Delta=16-4\times(-12)=64.$
$\Delta>0$ donc l'équation (E) a deux solutions :
$y_1=\frac{4-\sqrt{64}}{2}=-2$ et $y_2=\frac{4+\sqrt{64}}{2}=6.$
Il y a donc deux points d'abscisse 6 qui appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, de coordonnées (6 ; – 2) et (6 ; 6). On a donc D (6 ; 6).

Conseil

On fait bien sûr une figure que l'on complète au fur et à mesure de l'exercice et on y contrôle tous les résultats obtenus par le calcul.



3. a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d.

b. Ω est le milieu de [AB] donc ses coordonnées sont $x_\Omega=\frac{x_A+x_B}{2}=5$ et $y_\Omega=\frac{y_A+y_B}{2}=2$.

Alors $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}6-5\\6-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\Omega D}=\vec{n}$.

c. Par la question **3.b.**, (ΩD) est orthogonale à d. De plus le point D appartient à la droite d car ses coordonnées vérifient l'équation de d.
La droite d est donc la droite passant par le point D de $\mathcal{C}$ et perpendiculaire au rayon $[\Omega D]$: c'est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en D.