Exercice 125

a. On utilise la formule avec les longueurs et le cosinus (propriété **11** page 318) :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \cos(120°) = -3.$

b. Le repère (O ; I, J) étant orthonormé on peut calculer le produit scalaire en utilisant l'expression du produit scalaire avec les coordonnées (définition page 312) :

$\overrightarrow{AB}\binom{3}{1}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{1}{2}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3{\times}1 + 1{\times}2 = 5.$

c. Le quadrillage étant orthonormé, on peut placer le projeté orthogonal de C sur (AB) ; on utilise l'expression avec le projeté orthogonal (propriété **10** page 318) :
Si H désigne le projeté orthogonal de C sur (AB),
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -4 \times 2 = -8.$

Remarque
On aurait aussi pu choisir un repère orthonormé lié au quadrillage et calculer ce produit scalaire avec les coordonnées.

d. On peut ici décomposer les vecteurs selon les directions des côtés du carré qui sont deux à deux orthogonales (ce qui annulera certains produits scalaires en cours de calcul) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right)$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \underbrace{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM}}_{=0} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \overrightarrow{MB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \frac{1}{2}MB^2 = 16 + \frac{1}{2} \times 64 = 48$$

Remarque
On aurait aussi pu choisir un repère orthonormé comme $(M ; \frac{1}{8}\overrightarrow{MB}, \frac{1}{8}\overrightarrow{MP})$ et calculer ce produit scalaire avec les coordonnées.

Méthode

On choisit la méthode la plus adaptée aux données fournies par l'énoncé entre :
- le calcul avec les coordonnées dans un repère orthonormé (définition page 312) ;
- le calcul utilisant un projeté orthogonal (propriété **10** page 318) ;
- le calcul à l'aide de deux longueurs et du cosinus d'un angle (propriété **11** page 318) ;
- la décomposition d'un ou des deux vecteur(s) puis un développement ;
- le calcul à l'aide unique-ment de normes de vecteurs (propriété **9** page 316).

Conseil

On vérifie que le signe du produit scalaire obtenu est cohérent avec la figure :
- si $\widehat{BAC}$ est aigu, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est positif ;
- si $\widehat{BAC}$ est obtus, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est négatif.