Exercice 88

1. a. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.

On sait que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, on a donc

$\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$.

Or $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

Méthode

En utilisant les formules de duplication, on exprime $\cos^2 a$ en fonction de $\cos(2a)$. On conclut en tenant compte du signe du cosinus.

b. $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$

donc $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2. $\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5} = 1$ d'où

$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

Or $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{5} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Méthode

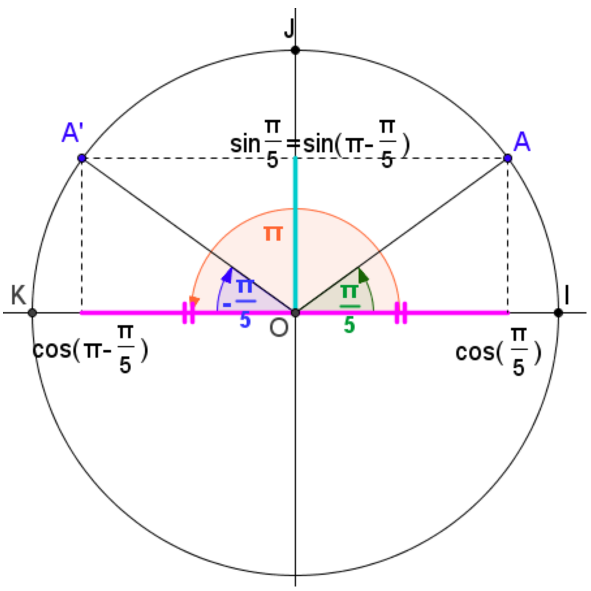
On utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ en tenant compte du signe du sinus.

3. $\cos\frac{4\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

et $\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Méthode

On utilise les propriétés du cosinus et du sinus des angles associés.



↘Conseil

Ne pas hésiter à refaire au brouillon comme ci-contre un cercle trigonométrique pour retrouver rapidement ces propriétés.