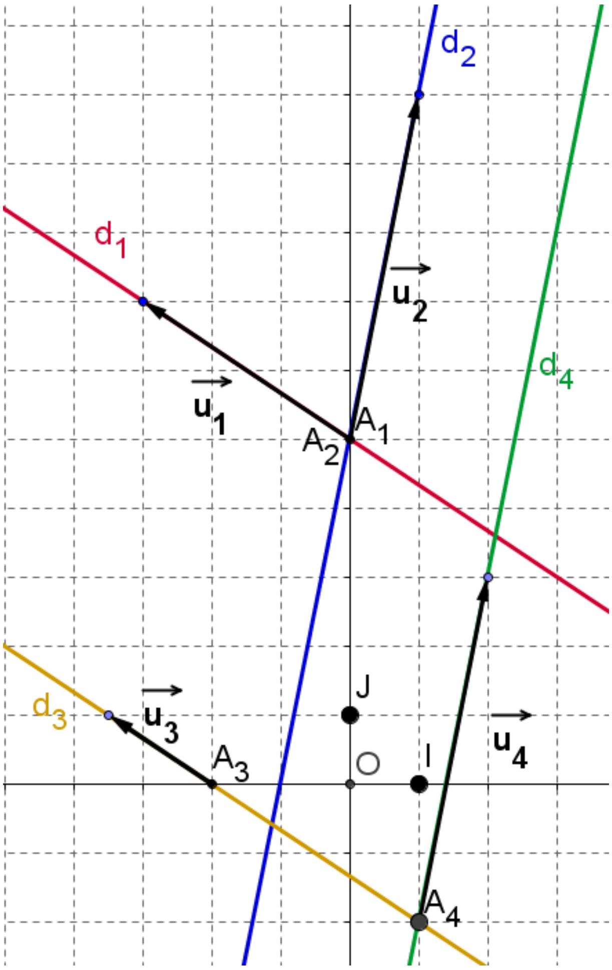
Exercice 85

a Pour $d_1 : 2x + 3y - 15 = 0$
Si $x = 0$, $3y - 15 = 0$ donc $y = 5$ donc A_1 (0 ; 5) $\in d_1$
et $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1.

Pour $d_2 : 5x - y + 5 = 0$
Si $x = 0$, $-y + 5 = 0$ donc $y = 5$ donc A_2 (0 ; 5) $\in d_2$
et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_2.

Pour $d_3 : x + 1{,}5y + 2 = 0$
Si $y = 0$, $x + 2 = 0$ donc $x = -2$ donc A_3 (-2 ; 0) $\in d_3$
et $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_3.

Pour $d_4 : y = 5x - 7$
Si $x = 1$, y= $5 - 7$ donc $y = -2$ donc A_4 (1 ; -2) $\in d_4$
et $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_4.



Méthode
On cherche des **points** à coordonnées entières, éventuellement avec une coordonnée nulle.
On détermine un **vecteur directeur** en utilisant la propriété **9** si on a une équation cartésienne de la droite,
en utilisant la propriété **7** si on a l'équation réduite de la droite.

↘Conseil
Pour la dernière droite, on peut aussi choisir le point de coordonnées (0 ; -7)

b. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3\begin{pmatrix}-1{,}5\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{u_3}$.
On en déduit que d_1 et d_3 ont des vecteurs directeurs colinéaires donc elles sont parallèles.
$\mathrm{A}_1(0;5) \in d_1$ et $0 + 1{,}5 \times 5 + 2 \neq 0$ donc $\mathrm{A}_1 \notin d_3$donc d_1 et d_3 sont strictement parallèles.

De même $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_4}$ donc d_2 et d_4 sont parallèles.
A_2 (0 ; 5) $\in d_2$ et $5 \times 0 - 7 \neq 5$ donc $\mathrm{A}_2 \notin d_4$ donc d_2 et d_4 sont strictement parallèles.

Enfin, $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $-3 \times 5 - 2 \times 1 \neq 0$ donc d_1 et d_2 sont sécantes.

On en déduit que ces droites forment un parallélogramme.

↘Conseil
Pour montrer que deux droites ne sont pas confondues, on vérifie qu'un point de l'une n'appartient pas à l'autre.

Méthode
On utilise la propriété caractéristique du parallélogramme suivante : un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux.

c. Le centre M du parallélogramme est le milieu des diagonales.

A_1 appartient à d_1 et d_2 donc c'est un sommet du parallélogramme.

Le sommet opposé est le point d'intersection de d_3 et d_4.
$\mathrm{A}_4 \in d_4$ et A_4 appartient à d_3 car $1 + 1{,}5(-2) + 2 = 0$.

Le centre du parallélogramme est donc le milieu de [$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$].
$x_\mathrm{M} = \frac{x_{\mathrm{A}_1} + x_{\mathrm{A}_4}}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_\mathrm{M} = \frac{y_{\mathrm{A}_1} + y_{\mathrm{A}_4}}{2} = \frac{3}{2}$

Le centre du parallélogramme a pour coordonnées$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

↘Conseil
Le choix des points des droites dans la question **a.** permet de simplifier le problème.
La figure peut aider à conjecturer les coordonnées des sommets du parallélogramme.
On peut aussi trouver les coordonnées du point d'intersection de d_3 et d_4 en résolvant le système formé par les équations de ces deux droites.