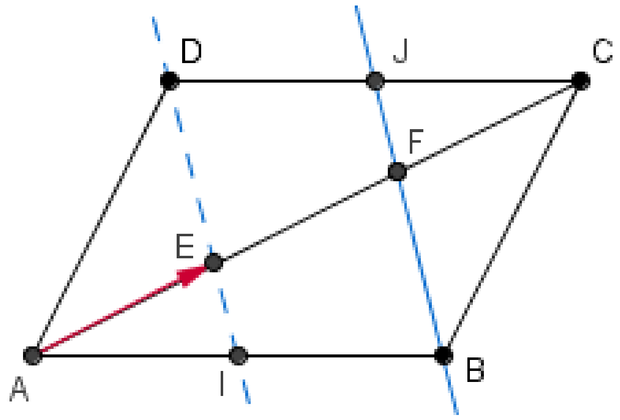
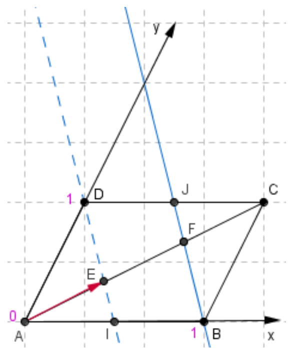
Exercice 84

1.



↘Conseil
On peut construire les axes du repère (A, B, D) et les graduer.



2. a. Le repère est (A, B, D) donc A(0 ; 0) ; B(1 ; 0) ; D(0 ; 1). ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
On en déduit : C(1 ; 1).

b. On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
$E(x_E; y_E)$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$,

C(1 ; 1) donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

On en déduit que $E\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

I est le milieu de [AB] donc $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2}$ et
$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$. On en déduit que $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
De même, J est le milieu de [DC] donc $x_J = \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{1}{2}$ et
$y_J = \frac{y_D + y_C}{2} = 1$. On en déduit que $J\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Méthode
On utilise la méthode de l'exercice résolu **9** : pour montrer que les points I, E et D sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires.

3. $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} x_E - x_I \\ y_E - y_I \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} x_D - x_I \\ y_D - y_I \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
Or $-\frac{1}{6} \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Donc, d'après la propriété **1**, les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires et les points I, E et D sont alignés.

4. a. $M(x\,;y) \in (BJ)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow (x-1)\times 1 - y \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}y - 1 = 0.$

$x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de (BJ).

Méthode

La droite (BJ) passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}$: on utilise donc la méthode de l'exercice résolu 5

b. D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{ID}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont colinéaires car égaux et on en déduit que les droites (BJ) et (ID) sont parallèles.

Méthode

On utilise la propriété **2.**

5. M(x ; y) ∈ (AC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow x - y = 0$

$x - y = 0$ est une équation cartésienne de (AC).

6. a. $F(x_F; y_F) \in (AC)$ donc $x_F - y_F = 0$ soit $x_F = y_F$

On a alors $F(x_F; x_F) \in (BJ)$ donc

$x_F + \frac{1}{2}x_F - 1 = 0$ donc $x_F = \frac{2}{3}$ puis $y_F = \frac{2}{3}$.

Les coordonnées de F sont $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Méthode

Les coordonnées du point F doivent vérifier à la fois l'équation de (AC) trouvée en 5. et l'équation de (BJ) trouvée en 4.a.

b. Le milieu F' de [EC] a pour coordonnées

$x_{F'} = \frac{x_E + x_C}{2} = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$ et $y_{F'} = \frac{y_E + y_C}{2} = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$

or les coordonnées de F sont $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

donc F est le milieu de [EC].

Méthode

Pour montrer que F est le milieu de [EC], on calcule les coordonnées du milieu de [EC] et on les compare à celles de F.