Exercice 55 Résolution détaillée

On lance n fois, avec $n \geq 2$, une pièce supposée équilibrée et on note à chaque lancer le côté PILE ou FACE obtenu.

Question 1
Exprimer en fonction de n la probabilité p_n d'avoir au moins un PILE lors des n lancers.

La situation décrite consiste à répéter n fois, de façon indépendante, le lancer d'une pièce supposée équilibrée. Les issues d'un lancer sont PILE et FACE dont les probabilités sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
L'événement A : « obtenir au moins une fois PILE » s'exprimant à l'aide de « au moins un(e) », on s'intéressera donc à l'événement contraire $\bar{A}$ (voir conseil ci-contre).

Conseil
Lorsqu'un événement A se définit à l'aide de « au moins un(e) … », il est souvent judicieux de s'intéresser à son événement contraire $\bar{A}$, qui s'exprimera par « aucun(e) … ».

L'événement contraire de l'événement A : « obtenir au moins une fois PILE » est l'événement $\bar{A}$: « ne jamais obtenir PILE » ou encore « obtenir n fois FACE ».

Méthode
Lorsqu'on répète, n fois, une même expérience aléatoire, la probabilité d'une liste de résultats est obtenue par la loi produit (voir page 220) :

$P(a_1, a_2, \dots, a_n) =$
$P(a_1)\ P(a_2)\ P(a_3) \dots P(a_{n-1})\ P(a_n)$.

L'événement $\bar{A}$ coïncide donc avec le seul résultat ($FFFFFF \dots FFFFF$) où F intervient n fois.

Sa probabilité, en appliquant la loi produit (voir page 220) est alors :
$P(\bar{A}) = P(FFFFFF \dots FFFFF) = [P(F)]^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On en déduit : $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, c'est-à-dire : $P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Question 2
Écrire un algorithme qui détermine la première valeur de n tel que $p_n = 1$ à 10^{-6} près.

Comme $p_n \leq 1$, dire que « $p_n = 1$ à 10^{-6} près », équivaut à dire que : $1 - 10^{-6} \leq p_n \leq 1$.

D'où l'algorithme suivant :

```
VARIABLE :        n, p nombres
INITIALISATION :  n prend la valeur 1
                  p prend la valeur 1 − (1/2)^n
TRAITEMENT :
    Tantque p < 1 − 10^−6 Faire
    |             n prend la valeur n + 1
    |             n prend la valeur 0
    FinTanque
SORTIE :          Afficher n
```

En implémentant cet algorithme sur un logiciel, on trouve : $n \geq 17$.