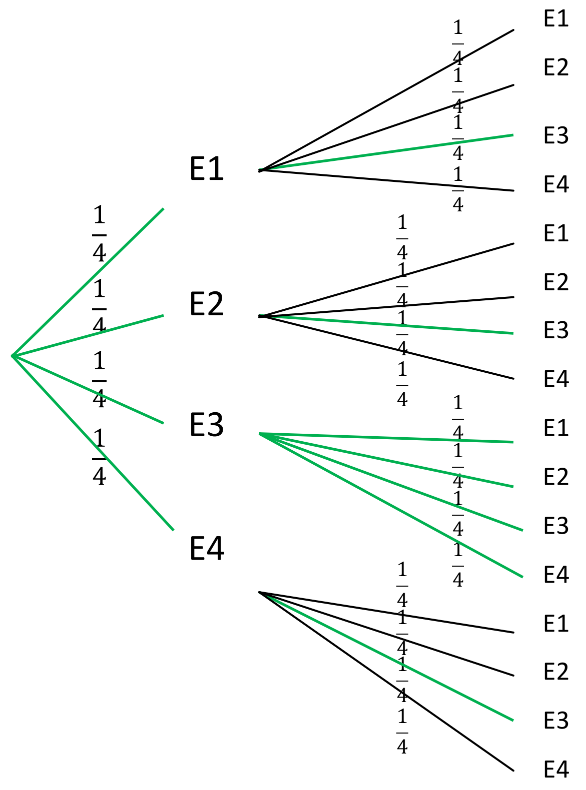
Exercice 54 Résolution détaillée

Question 1
Deux personnes prennent ensemble, au rez-de-chaussée, l'ascenseur d'un immeuble comportant 4 étages. Chacune peut se rendre avec d'égales chances dans les 4 étages, indépendamment de l'autre personne.

Conseil
Avant de « dessiner » un arbre, il convient de se demander :
1. Quelle expérience E la situation répète-t-elle à l'identique ?
2. Quelles sont les issues de E (incompatibles 2 à 2) à privilégier et quelles sont leurs probabilités (de somme égale à 1) ?

• Représenter la situation par un arbre
Cette situation peut s'assimiler à la répétition, 2 fois, de l'expérience E suivante : « Une personne prenant l'ascenseur au rez-de-chaussée descend au hasard à l'un des 4 étages ».
Les issues peuvent se coder E1, E2, E3 et E4 (correspondant aux numéros d'étage).
Chacune de ces issues a pour probabilité $\frac{1}{4}$.



• Calculer les probabilités des événements :
A : « Les deux personnes descendent au premier étage »
B : « Les deux personnes descendent au même étage »
C : « L'une descend au 3e étage et l'autre au 4e étage »
D : « Au moins une personne descend au 3e étage »

• L'événement A est réalisé par le seul chemin de l'arbre « passant » deux fois par E1, que l'on notera E1E1.
D'où P(A) = P(E1E1) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

• P(B) = P(E1E1 ; E2E2 ; E3E3 ; E4E4) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

• P(C) = P(E3E4 ; E4E3) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

• L'événement D est réalisé par tout chemin de l'arbre passant par E3 ou aboutissant à E3. Ces chemins ont été colorés en vert dans l'arbre ; il en existe 7 et la probabilité de chaque chemin est $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Il en résulte que P(D) = $\frac{7}{16}$.

• Une autre méthode pour calculer P(D)

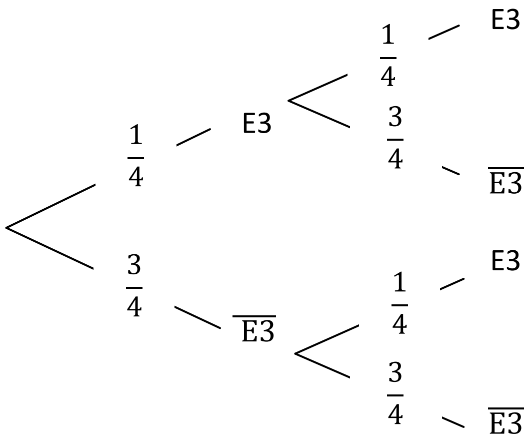
Conseil

Lorsqu'un événement D se définit à l'aide de « au moins un(e) ... » , il est souvent judicieux de s'intéresser à son événement contraire $\overline{D}$, qui s'exprimera par « aucun(e) ... ».

L'événement contraire de l'événement
D : « Au moins une personne descend au 3e étage »

est l'événement
$\overline{D}$: « Aucune personne ne descend au 3e étage ».

Pour calculer P($\overline{\mathrm{D}}$), on peut simplifier la situation en ne retenant pour l'expérience E « Une personne descend au hasard à l'un des 4 étages » que les deux issues E3 « la personne descend au 3e étage » et $\overline{E3}$, son contraire.
On a alors P(E3) = $\frac{1}{4}$, et P($\overline{\mathrm{E3}}$) = $\frac{3}{4}$.



L'événement $\overline{D}$: « Aucune personne ne descend au 3e étage » correspond alors à une seule branche d'un arbre simplifié (voir ci-contre) ou imaginé, comportant 4 chemins (et non 16 comme précédemment).

On a alors (voir loi produit page ...) :
P($\overline{D}$) = P($\overline{E3}\ \overline{E3}$) = P($\overline{E3}$)P($\overline{E3}$) = $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.
On retrouve ainsi : P(D) = 1 - P($\overline{D}$) = 1 - $\frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Question 2
Dix personnes prennent ensemble un ascenseur au rez-de-chaussée d'une tour de 49 étages. Chacune peut se rendre avec d'égales chances dans les 49 étages, indépendamment de chacune des autres personnes.

• Quelle est la probabilité qu'elles descendent toutes au 49e étage ?

L'expérience E ' : « Une personne prenant l'ascenseur au rez-de-chaussée descend au hasard à l'un des 49 étages » est répétée 10 fois.

Il vaut mieux renoncer à représenter cette situation par un arbre (le nombre de chemins serait 49^{10} !).

Notons E49 l'issue de l'expérience E ' suivante :
« la personne descend au 49^e étage ».
Les 49 issues étant équiprobables selon l'énoncé, on a : P(E49) =$\frac{1}{49}$.

Méthode

Dans le cas d'un nombre de répétitions dépassant 4 ou 5, il devient fastidieux d'illustrer la situation par un arbre pondéré. Il faut alors chercher à le simplifier, à ne le représenter que partiellement, ou même, à seulement se l'imaginer.
La loi produit s'applique dans ce contexte, avec ou sans le support visuel d'un arbre (voir page 220).

Lorsqu'on répète 10 fois E ', l'événement « Chacune des 10 personnes descend au 49^e étage » correspond dans notre arbre « mental » au seul chemin E49 E49 E49 … E49, où l'issue E49 est répétée 10 fois.

Par la loi produit, on obtient donc :
P(E49 E49 E49 … E49) = $P(E49)^{10} = (\frac{1}{49})^{10} \approx 1,25 \times 10^{-17}$.
Autant dire qu'il est très improbable que le hasard conduise les 10 personnes à quitter l'ascenseur au 49^e étage !

• Quelle est la probabilité qu'elles descendent toutes au même étage ?

La probabilité que les 10 personnes descendent au même étage est la probabilité que les 10 personnes descendent au 1er étage ou au 2nd étage ou au 3^e étage … ou au 49^e étage.
Or, quel que soit l'étage k de l'immeuble, la probabilité qu'une personne descende à cet étage k reste égale à $\frac{1}{49}$ et la probabilité que les 10 personnes descendent à ce même étage k est égale à $(\frac{1}{49})^{10}$, comme dans la question précédente, avec l'étage 49.

Il en résulte que la probabilité que les 10 personnes descendent au même étage est égale à la somme des probabilités que les 10 personnes descendent toutes à l'étage 1, à l'étage2, …, à l'étage 49. La probabilité cherchée est donc égale à $49 \times (\frac{1}{49})^{10}$, qui s'écrit encore $(\frac{1}{49})^9 \approx 6,14 \times 10^{-16}$.