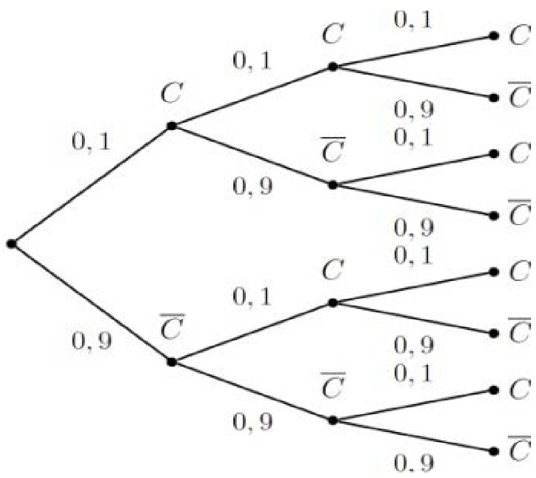
Exercice 53 Résolution détaillée

Une machine outil peut, durant sa période de garantie de trois ans, connaître ou non, chaque année, une panne (jamais plusieurs), avec une probabilité égale à p = 0,1.

Question 1
Illustrer la situation par un arbre pondéré.

Cette situation consiste à répéter trois fois de façon identique l'expérience E consistant à observer sur une année si la machine outil connait ou non une panne (jamais plusieurs).
Pour une année quelconque de la période de garantie, on désigne par C l'événement : « la machine connaît une panne durant l'année ».
L'énoncé donne : P(C) = 0,1 ; on en déduit P($\bar{C}$) = 0,9.



Conseil

Que l'énoncé le mentionne ou non, la répétition, n fois, d'une même expérience aléatoire dont le nombre d'issues est réduit, peut se représenter par un arbre pondéré.
Lorsque n parait grand pour une telle illustration, un arbre « partiel » peut être envisagé (voir exercice résolu 5).

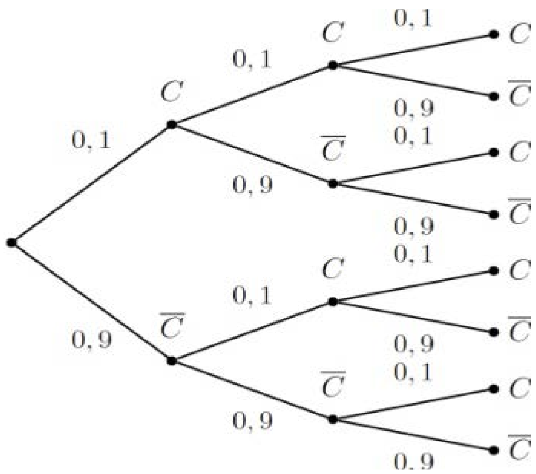
Question 2
Soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre d'années de bon fonctionnement de la machine outil, avant une première panne éventuelle, pendant la période de garantie.

• **Déterminer la loi de probabilité de *Y***

Les valeurs prises par Y sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3.
Il s'agit de calculer P(Y=y_i) pour chaque y_i.

Méthode

Pour faciliter le calcul des probabilités des événements ($Y = y_i$), on peut compléter l'arbre pondéré qui illustre la situation en faisant figurer à chaque extrémité de l'arbre la valeur de Y qui correspond au chemin.



--- ce chemin réalise l'événement (Y=0)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=0)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=0)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=0)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=1)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=1)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=2)

--- ce chemin réalise l'événement (Y=3)

Il suffit alors d'utiliser les règles de fonctionnement de l'arbre (voir B. p 220).
$P(Y=0) = 0{,}1^3 + 0{,}1^2 \times 0{,}9 + 0{,}1^2 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}9^2 = 0{,}1$
$P(Y=1) = 0{,}9 \times 0{,}1^2 + 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}09$
$P(Y=2) = 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 0{,}081$
$P(Y=3) = 0{,}9^3 = 0{,}729$.

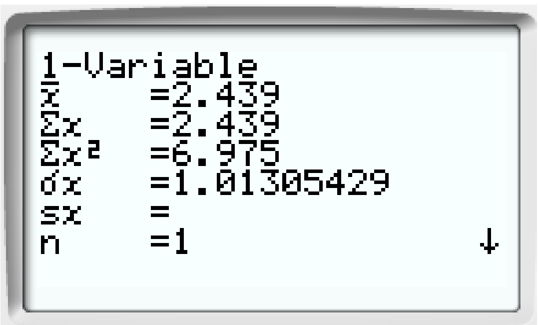
Leur somme est-elle bien égale à 1 ?
OUI !

On peut présenter la loi de probabilité de Y dans un tableau :

y_i	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	0,1	0,09	0,081	0,729

• **Calculer l'espérance et l'écart-type de *Y***

MÉTHODE 1 : Avec une calculatrice



On obtient ainsi :
E(Y) = 2,439
σ(Y) = 1,013

Méthode

L'espérance $E(Y)$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{V(Y)}$ d'une variable aléatoire Y peuvent être obtenues à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
Mais, au vu de la simplicité de la loi de probabilité de Y, on peut aussi les déterminer par un calcul direct utilisant les expressions figurant dans leurs définitions, page 218.
Pour le calcul de $V(Y)$, on peut encore utiliser avec avantage l'expression mentionnée en remarque, en bas de la page 218 et démontrée dans l'exercice 60.

MÉTHODE 2 : Avec les définitions

$E(Y) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}09 + 2 \times 0{,}081 + 3 \times 0{,}729$
$E(Y) = 2{,}439$.

$V(Y) = 0{,}1 \times (0 - 2{,}439)^2 + 0{,}09 \times (1 - 2{,}439)^2 + 0{,}081 \times (2 - 2{,}439)^2 + 0{,}729 \times (3 - 2{,}439)^2$.
D'où $V(Y) = 1{,}026279$.
Il en résulte : $\sigma(Y) = \sqrt{1{,}026279} = 1{,}013$.

Conseil

Lorsqu'on décide de calculer la variance V(X) d'une variable aléatoire sans utiliser les fonctions d'une calculatrice, il est utile de savoir que l'expression de V(X) donnée par définition :
$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i \, [\, x_i - E(X)]^2$
s'écrit encore
$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i \, x_i^2 - [E(X)]^2$.

Un moyen mnémotechnique pour retenir cette seconde expression peut consister à observer que V(X) est « la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne ».

MÉTHODE 3 : Avec une autre expression de la variance

On utilise ici : $V(Y) = \sum_{i=1}^{4} p_i \, y_i^2 - [E(Y)]^2$.

$V(Y) = 0{,}1\times0^2 + 0{,}09\times1^2 + 0{,}081\times2^2 + 0{,}729\times3^2 - 2{,}439^2 = 1{,}026279$.
On obtient de même $\sigma(Y) = \sqrt{1{,}026279} = 1{,}013$.

• Interprétation

E(Y) = 2,439 conduit à dire que le nombre moyen d'années de bon fonctionnement auquel on peut s'attendre pour cette machine-outil est de 2,4 ans environ.
σ(Y) = 1,013 mesure la dispersion des valeurs y_i prises par Y autour de son espérance *E(Y)*.