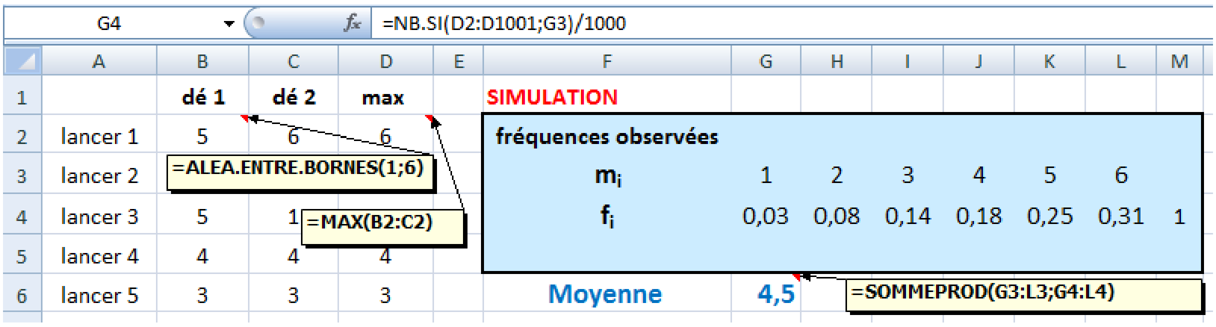
## Exercice 52 Résolution détaillée

On lance deux dés cubiques supposés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le joueur gagne à chaque lancer une somme en euros égale au maximum des deux numéros sortis. La variable aléatoire $M$ prend pour valeur le montant de ce gain.

### Question 1 : Simulation

La copie d'écran ci-dessous montre une feuille de tableur :
- où l'on a simulé 1 000 lancers de deux dés supposés équilibrés
- où l'on a fait afficher dans un tableau les valeurs $m_i$ prises par la variable aléatoire $M$ et leurs fréquences $f_i$
- où l'on a calculé la moyenne des valeurs prises par $M$ sur cet échantillon de taille 1000.




### Question 2 : Modélisation

**Loi de probabilité de M**

L'expérience réalisée : lancer de deux dés supposés équilibrés et gain associé correspondant en euros au plus grand numéro sorti, peut se représenter à l'aide d'un tableau à double entrée où l'on fait figurer dans chaque case le gain du joueur.

| Dé 2<br>Dé 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1 ;1)<br>gain1 | (1 ;2)<br>gain2 | (1 ;3)<br>gain3 | (1 ;4)<br>gain4 | (1 ;5)<br>gain5 | (1 ;6)<br>gain6 |
| 2 | (2 ;1)<br>gain2 | (2 ;2)<br>gain2 | (2 ;3)<br>gain3 | (2 ;4)<br>gain4 | (2 ;5)<br>gain5 | (2 ;6)<br>gain6 |
| 3 | (3 ;1)<br>gain3 | (3 ;2)<br>gain3 | (3 ;3)<br>gain3 | (3 ;4)<br>gain4 | (3 ;5)<br>gain5 | (3 ;6)<br>gain6 |
| 4 | (4 ;1)<br>gain4 | (4 ;2)<br>gain4 | (4 ;3)<br>gain4 | (4 ;4)<br>gain4 | (4 ;5)<br>gain5 | (4 ;6)<br>gain6 |
| 5 | (5 ;1)<br>gain5 | (5 ;2)<br>gain5 | (5 ;3)<br>gain5 | (5 ;4)<br>gain5 | (5 ;5)<br>gain5 | (5 ;6)<br>gain6 |
| 6 | (6 ;1)<br>gain6 | (6 ;2)<br>gain6 | (6 ;3)<br>gain6 | (6 ;4)<br>gain6 | (6 ;5)<br>gain6 | (6;6)<br>gain6 |

**Conseil**

Il faut bien distinguer les 36 issues de l'expérience (résultats des deux lancers sous forme de couples $(a\,;b)$ figurant dans le tableau) des 6 valeurs prises par la variable aléatoire M.
Le modèle de l'équiprobabilité porte sur l'ensemble des 36 couples et non sur celui des 6 gains associés.

Les dés étant supposés équilibrés, on peut adopter le modèle de l'équiprobabilité sur l'ensemble des 36 issues $(a\,;\,b)$ de l'expérience qui correspondent aux 36 cases du tableau.

La loi de probabilité de la variable aléatoire M (qui donne le gain du joueur) découle du modèle précédent.
Par exemple : P(M = 3) = P({(1 ;3) ; (2 ;3) ; (3 ;1) ; (3 ;2) ; (3 ;3)}) = 5/36.
On procède de même pour déterminer P(M = k) pour les autres valeurs de k.
On en déduit la loi de probabilité de M présentée dans le tableau suivant :

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(M=k) | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |

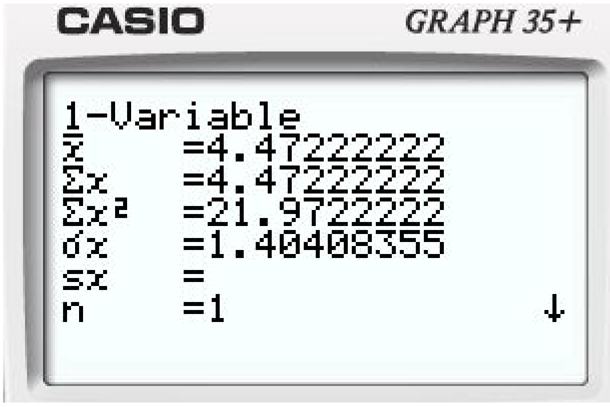
**Calcul et interprétation de l'espérance de M**

• E(M) = $\sum_{k=1}^{6} k$ P(X=$k$) = 161/36 ≈ 4,47.

• Sur un grand nombre de réalisations de cette expérience (lancer de deux dés supposés équilibrés et gain correspondant au plus grand des numéros obtenus), un joueur gagnerait en moyenne 4,47 € par partie.

• **Conséquence :** Le joueur pourrait accepter de donner une mise *m* pour participer à ce jeu, à condition qu'elle reste inférieure à 4,47 € s'il veut que le jeu lui reste favorable.

**Calcul et interprétation de l'écart-type de M**




• Une calculatrice donne pour écart-type de M le nombre σ = 1,40.

• Ce nombre est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à 4,47 € des valeurs prises par la variable aléatoire M (gains compris entre 1 et 6), pondérée par les probabilités correspondantes.
Plus cet écart-type est grand, plus la dispersion des gains autour de E(X) est importante, et donc plus le jeu parait risqué.

**Conseil**

Contrairement à l'espérance de la variable aléatoire M dont le calcul peut s'effectuer « à la main » , à partir du tableau précédent, le calcul de l'écart-type se trouve grandement facilité par l'utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur.

*Remarque*

L'écart-type σ d'une variable aléatoire X mesure la dispersion des valeurs $x_i$ prises par X autour de son espérance E(X).

Toutefois l'interprétation de l'écart-type d'une seule variable aléatoire reste limitée et c'est dans la comparaison de plusieurs variables aléatoires que cet indicateur sera le plus utile (voir exercices 29 et 30 p 229).