Exercice 70 Résolution détaillée

1. Il semble géométriquement que d'un triangle au suivant, le périmètre et l'aire diminuent, autrement dit que les suites (p_n) et (a_n) soient décroissantes.

2.a. Par le théorème des milieux dans le triangle $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ on a :

$$\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\ ;\ \mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n \ \ et\ \ \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n.$$

Par conséquent, en sommant ces trois longueurs : $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ pour tout $n \geq 0$.

On en déduit que la suite (p_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc $p_n = p_0 \times (\frac{1}{2})^n$.

Calculons p_0 : $p_0 = \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_0\mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_0\mathrm{A}_0$.

Le triangle $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0$ est rectangle en A_0, par le théorème de Pythagore, on obtient, en cm :

$\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0 = \sqrt{{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}^2 + {\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}^2} = 10.$ Donc $p_0 = 6 + 10 + 8 = 24.$

Par conséquent pour tout $n \geq 0, p_n = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

b. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est décroissante. Autrement dit, pour tout $n \geq 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où, en multipliant par 24 qui est positif, $p_{n+1} < p_n$.

La suite (p_n) est donc décroissante.

c. On entre la suite (p_n) sur une calculatrice ou sur un tableur et on cherche sur la table de valeurs de la calculatrice ou sur le tableur la première valeur de n telle que $p_n < 0{,}1$.

	A	B	C	D
1	n	p_n		
2	0	24	=24*(1/2)^A2	
3	1	12		
4	2	6		
5	3	3		
6	4	1,5		
7	5	0,75		
8	6	0,375		
9	7	0,1875		
10	8	0,09375		
11	9	0,046875		

Conseil

•Ne pas oublier de tenir compte des unités : p_n est exprimé en cm, il faut donc convertir 1 mm en 0,1 cm.

• On pourrait aussi créer un programme qui calcule p_n tant que $p_n > 0{,}01$. Ceci est surtout intéressant si on a plusieurs tests à faire ou si la valeur de n est très grande.

Conseil

Sur un tableur, on peut créer un test. Ci-dessus, en colonne C, on peut tester si le résulta obtenu en colonne B est inférieur ou non à 0,01 en entrant dans la cellule C2 puis en recopiant vers le bas la formule **=SI(B2<0,01 ; »OUI » ; » »)**

On trouve $n = 8$.
Les triangles dont le périmètre est supérieur à 1mm sont donc les triangles $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, … , $A_7B_7C_7$: ils sont au nombre de 8.

3.a. Le triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ est une réduction du triangle $A_nB_nC_n$ de rapport $\frac{1}{2}$ d'après la question 2.a. donc le rapport des aires est égal à $\frac{1}{4}$ soit $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ pour tout $n \geq 0$.
La suite (a_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc $a_n = a_0 \times (\frac{1}{4})^n$.

Or le triangle $A_0B_0C_0$ étant rectangle en A_0, son aire, en cm^2, est donnée par :

$$a_0 = \frac{1}{2}A_0B_0 \times A_0C_0 = 24.$$

Donc pour tout $n \geq 0$, $a_n = 24 \times (\frac{1}{4})^n$.

b. Le raisonnement est analogue à celui de la question 2.b.
La suite (a_n) est décroissante.

c. On cherche la première valeur de n telle que $a_n < 0{,}01$ (car 1 mm² = 0,01 cm²) sur la table de valeurs de la calculatrice ou sur tableur.

	A	B	C	D
1	n	a_n		
2	0	24	=24*(1/4)^A2	
3	1	6		
4	2	1,5		
5	3	0,375		
6	4	0,09375		
7	5	0,0234375		
8	6	0,00585938		
9	7	0,00146484		

On obtient $n = 6$. Il y a donc 6 triangles d'aires supérieures à 1 mm² :
$A_0B_0C_0$, … , $A_5B_5C_5$.