Exercice 69 Résolution détaillée

1. D'après l'énoncé, à chaque minute, la quantité d'eau versée est divisée par 2 c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$.

On a donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ pour tout $n \geq 1$.

La suite (v_n) est donc géoémtrique de raison $\frac{1}{2}$.

Son premier terme est v_1 donc $v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

avec $v_1 = \frac{1}{2}$. Donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ceci signifie qu'à la n-ième minute, la quantité d'eau versée est $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ L = $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 100$ cL

Méthode

Il faut traduire l'énoncé en exprimant le passage d'un terme de la suite au terme suivant.

2. On s'intéresse dans cette question à la quantité d'eau contenue dans le récipient à la n-ième minute (n ≥ 1), tant qu'il n'est pas plein.

3. a. À la première minute on verse un demi-litre d'eau soit 50 cL. On initialise V à 50, en mesurant les quantités d'eau en cL.

b. Il s'agit d'ajouter, chaque minute, la quantité d'eau versée à celle déjà contenue dans le récipient, et ceci tant qu'il ne contient pas au moins = 99 cL

D'où la fin de l'algorithme :

TRAITEMENT :
  Tant que $V \leqslant 99$ Faire
    n prend la valeur $n+1$
    V prend la valeur $V + \frac{1}{2^n} \times 100$
  Fin tant que
SORTIE : Afficher n

Conseil

Bien lire l'énoncé…

1 L = 100 cL

3. Calcul de V_n :

$V_n = v_1 + v_2 + \ldots v_n$ pour $n \geq 1$ et tant que le récipient n'est pas plein, exprimée en cL.

Donc $V_n = \left(\frac{1}{2}\right) \times 100 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 100 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 100$

$$V_n = \frac{1}{2} \times 100 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$V_n = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 100\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Méthode

Pour ajouter des termes consécutifs d'une suite géométrique, on se ramène, en mettant le premier terme en facteur, au calcul de

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

4. On cherche à trouver n tel que $v_n \geq 99$ soit
$100 - 100\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 99$ ce qui s'écrit encore $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}01$.
On peut demander le calcul des termes de la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ à la calculatrice et observer la table de valeurs.

Sur une calculatrice TI :

En mode suite, entrer :

```
Graph1  Graph2  Graph3
nMin=1
■ ·.u(n)=(1/2)^n
u(nMin)=
```

Puis régler la table de valeurs (déf table) :

```
CONFIG TABLE
 DébutTbl=1
 ΔTbl=1
Indpnt :  Auto  Demande
Dépndte : Auto  Demande
```

Et faire afficher la table de valeurs (table) :

n	u(n)
1	.5
2	.25
3	.125
4	.0625
5	.03125
6	.01563
7	.00781
8	.00391
9	.00195
10	9.8E-4
11	4.9E-4

n=1

On lit que c'est pour n = 7 que l'on a $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}01$.
C'est donc à la 7e minute que le récipient contiendra au moins 99 cL.

Sur une calculatrice Casio

Dans le menu RECUR, choisir le type F1	Entrer le terme général (1/2)^n (n s'obtient par F1)	Choisir SET et entrer ces réglages	Faire afficher la table par TABL (F6)