

## Exercice 69 Résolution détaillée

1. D'après l'énoncé, à chaque minute, la quantité d'eau versée est divisée par 2 c'est-à-dire multipliée par  $\frac{1}{2}$ .

On a donc  $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

Son premier terme est  $v_1$  donc  $v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

avec  $v_1 = \frac{1}{2}$ . Donc  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

Ceci signifie qu'à la  $n$ -ième minute, la quantité d'eau versée est  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ L} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 100 \text{ cL}$

2. On s'intéresse dans cette question à la quantité d'eau contenue dans le récipient à la  $n$ -ième minute ( $n \geq 1$ ), tant qu'il n'est pas plein.

3. a. À la première minute on verse un demi-litre d'eau soit 50 cL. On initialise  $V$  à 50, en mesurant les quantités d'eau en cL.

b. Il s'agit d'ajouter, chaque minute, la quantité d'eau versée à celle déjà contenue dans le récipient, et ceci tant qu'il ne contient pas au moins = 99 cL

D'où la fin de l'algorithme :

```
TRAITEMENT :
Tant que  $V \leq 99$  Faire
   $n$  prend la valeur  $n + 1$ 
   $V$  prend la valeur  $V + \frac{1}{2^n} \times 100$ 
Fin tant que
SORTIE : Afficher  $n$ 
```

3. Calcul de  $V_n$  :

$V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  pour  $n \geq 1$  et tant que le récipient n'est pas plein, exprimée en cL.

Donc  $V_n = \left(\frac{1}{2}\right) \times 100 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 100 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 100$

$$V_n = \frac{1}{2} \times 100 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$V_n = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 100 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

### Méthode

Il faut traduire l'énoncé en exprimant le passage d'un terme de la suite au terme suivant.

### Conseil

Bien lire l'énoncé...

1 L = 100 cL

### Méthode

Pour ajouter des termes consécutifs d'une suite géométrique, on se ramène, en mettant le premier terme en facteur, au calcul de

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

4. On cherche à trouver  $n$  tel que  $v_n \geq 99$  soit  
 $100 - 100 \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 99$  ce qui s'écrit encore  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01$ .

On peut demander le calcul des termes de la suite  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  à la calculatrice et observer la table de valeurs.

### Sur une calculatrice TI :

En mode suite, entrer :

```
Graph1 Graph2 Graph3
nMin=1
■ u(n) (1/2)^n
u(nMin)
```

Puis régler la table de valeurs (déf table) :

```
CONFIG TABLE
DébutTbl=1
ΔTbl=1
Indent : Auto Demande
Dépendte : Auto Demande
```

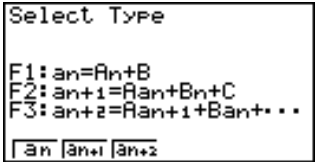
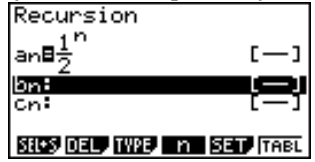
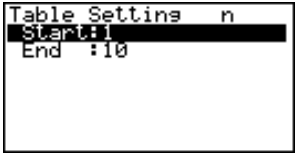
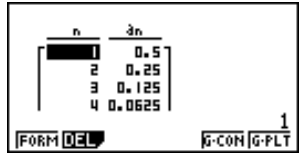
Et faire afficher la table de valeurs (table) :

$n$	$u(n)$
1	.5
2	.25
3	.125
4	.0625
5	.03125
6	.01563
7	.00781
8	.00391
9	.00195
10	9.8E-4
11	4.9E-4
$n=1$	

On lit que c'est pour  $n = 7$  que l'on a  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01$ .

C'est donc à la 7<sup>e</sup> minute que le récipient contiendra au moins 99 cL.

## Sur une calculatrice Casio

<p>Dans le menu RECUR, choisir le type F1</p> 	<p>Entrer le terme général <math>(1/2)^n</math> (n s'obtient par F1)</p> 	<p>Choisir SET et entrer ces réglages</p> 	<p>Faire afficher la table par TABL (F6)</p> 
---	--	--	--