Exercice 68 Résolution détaillée

1.a. On conjecture que la suite est croissante.

b. La suite semble avoir pour limite l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x + 2$ et de la droite d'équation $y = x$.
Or $\frac{1}{4}x + 2 = x \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$.
Il semble donc que la suite ait pour limite $\frac{8}{3}$.

2.a. Pour tout $n \geq 0$,
$$w_{n+1} = y_{n+1} - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}v_n + 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}v_n - \frac{2}{3}.$$

Donc $w_{n+1} = \frac{1}{4}\left(w_n - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}w_n$ pour tout $n \geq 0$.

> **Méthode**
>
> On applique les méthodes de l'exercice résolu 8 page 143.

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
Son premier terme est :
$$w_0 = v_0 - \frac{8}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}.$$
On en déduit que pour tout $n \geq 0$, $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

b. De $w_n = v_n - \frac{8}{3}$ on déduit que $v_n = w_n + \frac{8}{3}$ donc
$$v_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

c. La suite $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ est décroissante car $0 < \frac{1}{4} < 1$.
Pour tout $n \geq 0$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{4}\right)^n$ donc en multipliant par $-\frac{11}{3}$, négatif :
$-\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} > -\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, puis en ajoutant $\frac{8}{3}$ à chaque membre :

$$-\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{8}{3} > -\frac{11}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3} \text{ soit } v_{n+1} > v_n.$$

La suite (v_n) est donc croissante.

d. Dire que $v_n \approx \frac{8}{3}$ à 10^{-6} près signifie que $\frac{8}{3} - 10^{-6} \leq v_n \leq \frac{8}{3} + 10^{-6}$.

Comme $v_n < \frac{8}{3}$ pour tout $n \geq 0$, ce ci équivaut à $\frac{8}{3} - 10^{-6} \leq v_n$.

On a $\frac{8}{3} - 10^{-6} = 2{,}666665666\ \ldots$

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur on obtient que la première valeur de n pour laquelle cette inégalité est vraie est $n_0 = 11$.

	A	B	C	D
1	n	v_n	test	
2	0	-1		
3	1	1,75		
4	2	2,4375		
5	3	[illegible]		
6	4	2,65234375		
7	5	2,66308594		
8	6	2,66577148		
9	7	2,66644287		
10	8	2,66661072		
11	9	2,66665268		
12	10	2,66666317		
13	11	2,66666579	oui	
14	12	2,66666645	oui	
15	13	2,66666661	oui	
16	14	2,66666665	oui	
17	15	2,66666666	oui	
18	16	2,66666667	oui	

=SI(B2>8/3 -10^-6;"oui";"")

Conseil

Le nombre $\frac{8}{3} - 10^{-6}$ auquel on veut comparer v_n a une écriture décimale assez compliquée. L'utilisation d'un test sur le tableur qui automatise la comparaison est particulièrement appréciable.

La formule entrée ci-contre en C2 est recopiée vers le bas ; elle permet d'afficher « oui » si la condition est remplie, c'est-à-dire si le nombre contenu dans la cellule de la colonne B sur la même ligne est bien supérieur à $\frac{8}{3} - 10^{-6}$ et de ne rien afficher sinon.

La suite (v_n) étant croissante, on est sûr que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq v_{n_0}$ et donc $v_n > \frac{8}{3} - 10^{-6}$.

Par conséquent $v_n \approx \frac{8}{3}$ à 10^{-6} près pour tout $n \geq 11$.

Remarque

On aurait pu transformer $\frac{8}{3} - 10^{-6} \leq v_n$ en $\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-6}$ ou encore $\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{3}{11} \times 10^{-6}$ et entrer à la calculatrice ou au tableur la suite $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ pour comparer ses termes à $\frac{3}{11} \times 10^{-6}$.