Exercice 67 Résolution détaillée

a. Suite définie par $u_n = 2{,}1^n$ pour $n \geq 0$:
On reconnaît une suite de terme général q^n avec $q = 2{,}1$.
On peut donc appliquer la propriété 1 page 168 :
Comme $2{,}1 > 1$, la suite (u_n) est croissante.

b. Suite définie par $u_n = 3 + 2n$ pour $n \geq 0$:
On peut calculer $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer son signe :
$u_{n+1} = 3 + 2(n+1) = 5 + 2n$,
donc $u_{n+1} - u_n = 5 + 2n - (3 + 2n) = 2$.
Par conséquent, pour tout $n \geq 0$,
$u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
Ceci prouve que la suite (u_n) est croissante.

Méthode

On pourrait aussi montrer que la suite donnée à la question b. est une suite arithmétique de raison 2 et utiliser la propriété 1 page 168.

c. Suite définie par $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour $n \geq 1$:
Pour tout $n \geq 1, n + 1 > n > 0$.
En appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on obtient :
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

On multiplie chaque membre par 3, positif, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité :
$$\frac{3}{n+1} < \frac{3}{n}.$$

On ajoute 2 à chaque membre ce qui donne :
$$\frac{3}{n+1} + 2 < \frac{3}{n} + 2.$$

Autrement dit $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

Méthode

La suite de la question c. peut être étudiée de plusieurs façons :
- elle est donnée par une relation du type $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$.
On peut donc étudier le sens de variation de la fonction f: la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f l'est aussi.
Pour tout $n \geq 0$, de $n + 1 > n > 0$ on déduit $f(n+1) < f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

- l'expression de u_n étant assez simple, on aurait pu étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

d. Suite définie par $u_n = n \times 0{,}8^n$ *pour* $n \geq 0$:
<u>Solution 1</u> :
On a $u_0 = 0$; $u_1 = 0{,}8$; $u_2 = 1{,}28$; $u_3 = 1{,}536$;
$u_4 = 1{,}6384$; $u_5 = 1{,}6384$; $u_6 = 1{,}57286$.
Ainsi $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 \leq u_5$ mais $u_5 > u_6$.
La suite n'est donc ni croissante ni décroissante.

Conseil

On peut commencer par observer le comportement de la suite à l'aide d'une calculatrice.

Solution 2 :
$u_{n+1} - u_n = (n+1)0{,}8^{n+1} - n0{,}8^n$ où $0{,}8^{n+1} = 0{,}8 \times 0{,}8^n$.

Donc $u_{n+1} - u_n = 0{,}8^n[0{,}8(n+1) - n] = 0{,}8^n[0{,}8 - 0{,}2n]$.
On a $0{,}8^n > 0$ pour tout $n \geq 0$
et $0{,}8 - 0{,}2n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 4$.
Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 4$.
On a donc $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 \leq u_5$ puis la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 5.

Méthode

On aurait aussi pu penser à comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1, mais ceci n'est possible que pour $n \geq 1$ car $u_0 = 0$.