Exercice 98 Résolution détaillée

Question 1

On transforme $2-\frac{8}{x+2}$:

$$2-\frac{8}{x+2}=\frac{2(x+2)-8}{x+2}=\frac{2x-4}{x+2}.$$

Donc $f(x)=\frac{2x-4}{x+2}$ pour tout $x\neq 2$.

Autre solution :

On aurait aussi pu transformer $\frac{2x-4}{x+2}$ en faisant apparaître $x+2$ au numérateur pour pouvoir décomposer cette écriture fractionnaire.

On cherche une écriture de la forme

$$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{\ldots(x+2)+\cdots}{(x+2)}.$$

On ajuste le premier coefficient pour que le terme en x au numérateur soit bien égal à $2x$:

$$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{2(x+2)+\cdots}{(x+2)}.$$

Puis on ajuste la constante pour que le numérateur soit bien égal à $2x-4$:

$$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{2(x+2)+(-8)}{(x+2)}=\frac{2(x+2)-8}{x+2}.$$

On décompose ensuite en deux parties :

$\frac{2x-4}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}-\frac{8}{x+2}=2-\frac{8}{x+2}$ pour tout $x\neq 2$.

Cette méthode est intéressante quand le résultat n'est pas donné !

Méthode

Pour démontrer une égalité, on peut :
- transformer le membre de gauche pour arriver à celui de droite,
- transformer le membre de droite pour arriver à celui de gauche (ce qui est plus simple ici dans la question 1),
- transformer les deux membres pour montrer qu'ils sont égaux à une même troisième expression,
- transformer la différence pour montrer qu'elle est nulle.

Question 2

On prend $x\neq 2$.

$f(x)=2-8\times\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=x+2$.

Pour obtenir f, on multiplie donc $\frac{1}{u}$ par -8 (ce qui change le sens de variation) puis on ajoute 2 (ce qui ne change pas le sens de variation).

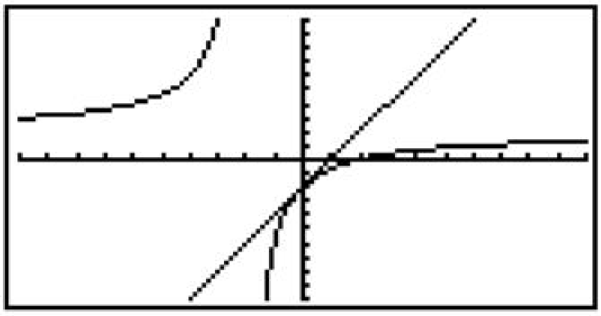
Donc f a le sens de variation contraire à celui de la fonction $\frac{1}{u}$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$u(x)$		↗	0	↗	
$\frac{1}{u(x)}$		↘	‖	↘	
$f(x)$		↗	‖	↗	

f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2[$ et sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Question 3

a. Il semble que C est au-dessus de la droite d d'équation $y = 2x - 2$ sur $]-\infty\,;\,-2[$ et en dessous sur $]-2\,;\,+\infty[$.



b. On étudie le signe de la différence :

$$f(x) - (2x-2) = \frac{2x-4}{x+2} - (2x-2) = \frac{2x-4-(x+2)(2x-2)}{x+2} = \frac{-2x^2}{x+2}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $-2x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)-(2x-2)$		$+$	‖	$-$	0	$-$	

Méthode

Pour étudier la position respective de deux courbes représentant des fonctions f et g, on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$ (ou $g(x)-f(x)$).
Si, sur un intervalle I, on a $f(x)-g(x)>0$, ceci signifie que $f(x)>g(x)$, donc que la courbe représentant f est au-dessus de celle de g sur cet intervalle.

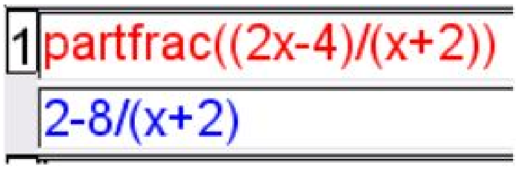
• Sur $]-\infty\,;\,-2[$, $f(x)-(2x-2)>0$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y=2x-2$.

• Sur $]-2\,;\,+\infty[$, $f(x)-(2x-2)<0$ donc $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite d'équation $y=2x-2$ sauf au point d'abscisse 0 où ces courbes sont sécantes.

Remarque : On pouvait éviter ici de faire un tableau de signe car $-2x^2$ est toujours négatif ou nul donc $f(x)-(2x-2)$ a le signe opposé à celui de $x+2$.

Question 4

Par exemple, avec le logiciel Xcas on utilise l'instruction *partfrac* :



Avec une TI89 ou une TI Voyage 200, on utilise l'instruction *propFrac* :