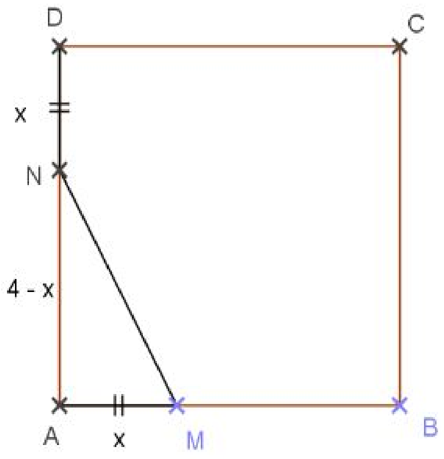
Exercice 97 Résolution détaillée

On commence par faire une figure, éventuellement sur un logiciel de géométrie.



Question 1

Comme M appartient à [AB] avec AB $= 4$, l'ensemble de définition de f est $[0\,;\,4]$.

Question 2

Dans le triangle AMN rectangle en A, $\mathrm{MN}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{AN}^2 = x^2 + (4-x)^2$.

Donc $f(x) = \sqrt{x^2 + (4-x)^2}$ ou encore $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$.

Question 3

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction $\sqrt{u}$ sur son ensemble de définition, on étudie d'abord le sens de variation de u.

On a $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 - 8x + 16$.

La fonction u est une fonction polynôme de degré 2.

Elle change de variation en $-\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$;

le coefficient du terme en x^2 étant positif,

on obtient ce tableau de variations :

x	0		2		4
$u(x)$	16	↘	8	↗	16
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	4	↘	$\sqrt{8}$	↗	4

Question 4

MN est minimale pour $x = 2$, c'est-à-dire quand

M et N sont les milieux de [AB] et [AD].

Question 5

La distance MN minimale est égale à

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

Conseil

On peut vérifier certains résultats :

- Pour $x = 0$, M est en A et N est en D donc MN = AD = 4.
- Pour $x = 4$, M est en B et N est en A donc MN = BA = 4.
- La distance minimale MN est obtenue quand M et N sont les milieux de [AB] et [AD].

On peut la calculer par le théorème des milieux dans le triangle ABD : elle est égale à

$$\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$