Exercice 126 Résolution détaillée

On se place dans le repère $(A\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ tel que
$\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{b}\overrightarrow{AD}$.
Ce repère est orthonormé car (AB) et (AD) sont orthogonaux et $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1$.

On a alors les coordonnées de points suivants :
A(0 ; 0), B(a ; 0) et D (0 ; b) d'où C(a; b).

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a et de b.

- I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ soit $(\frac{a}{2}; 0)$.

D'où les coordonnées de $\overrightarrow{DI}$: $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -b \end{pmatrix}$

- Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\binom{a}{b}$.
- Par suite, $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC} = \frac{a}{2} \times a - b^2 = \frac{a^2}{2} - b^2$.

Déterminons le format $\frac{a}{b}$.

Les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires
si et seulement si $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC} = 0$
si et seulement si $\frac{a^2}{2} - b^2 = 0$
si et seulement si $a^2 = 2b^2$
si et seulement si $\frac{a^2}{b^2} = 2$
si et seulement si $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ (car a et b sont positifs).

Les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si le rectangle a pour format $\sqrt{2}$.

On peut contrôler ce résultat à l'aide d'un logiciel en traçant un tel rectangle et en testant si (DI) et (AC) sont perpendiculaires.

Méthode

Les droites (DI) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC} = 0$.
On peut calculer $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{AC}$ en décomposant les vecteurs sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ou se placer dans un repère orthonormé. C'est la deuxième méthode que nous avons développée ici.

Remarque

Ce format est celui d'une feuille A4.