Exercice 125 Résolution détaillée

1. On a appris dans ce chapitre à calculer un angle dans un triangle quand on connaît les longueurs des trois côtés d'un triangle.
L'angle $\widehat{AHB}$ est un angle du triangle AHB, dans le plan (AHB). En effet les points A, H et B ne sont pas alignés donc déterminent un plan unique.
Déterminons les longueurs des côtés du triangle AHB.

Méthode

Par la formule d'Al-Kashi :
- on peut calculer un angle d'un triangle dès qu'on connaît si on connaît les longueurs des trois côtés du triangle,
- on peut déterminer la longueur d'un côté si on connaît l'angle opposé et les longueurs des deux autres côtés.

Voir exercice résolu 12.

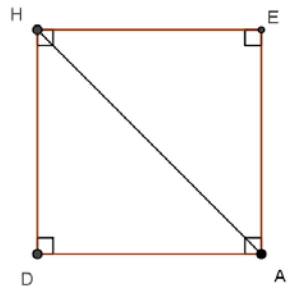
Déterminons les côtés du triangle AHB :

- Le côté AB :

Par énoncé, AB = a, arête du cube.

- Le côté AH :

Il s'agit de la diagonales du carré ADHE de côté a.



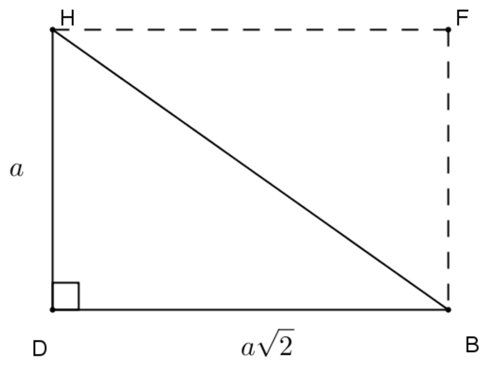
Conseil

Pour utiliser les théorèmes de géométrie plane dans l'espace, on a intérêt à faire des figures extraites dans les plans dans lesquels on travaille.

Par le théorème de Pythagore, par exemple dans le triangle AEH, on a $AH^2 = AE^2 + ED^2$.
On en déduit que $AH^2 = 2a^2$ et par suite, AH = $a\sqrt{2}$.

- Le côté BH :

Il s'agit d'une diagonale du cube. On peut la calculer dans le triangle BDH. En effet comme (HD) est perpendiculaire à la face ABCD, le triangle HDB est rectangle en D.
On sait que HD = a. De plus, BD est la diagonale du carré ABCD de côté a, donc
BD = AH = $a\sqrt{2}$.



Par suite, $BH^2 = BD^2 + DH^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.
On en déduit que $BH = a\sqrt{3}$.

Calculons l'angle $\widehat{AHB}$:

- **Solution 1 :**

Dans le triangle AHB, par la formule d'Al-Kashi :
$AB^2 = AH^2 + HB^2 - 2AH \times HB \times \cos \widehat{AHB}$
En remplaçant, on obtient :

$$a^2 = 2a^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{2}\sqrt{3}\cos \widehat{AHB}$$

D'où $\cos \widehat{AHB} = \frac{4a^2}{2a^2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
A l'aide de la calculatrice, on en déduit que $\widehat{AHB} \approx 35{,}3°$ à $0{,}1°$ près.

- **Solution 2** :

On remarque que $BH^2 = BA^2 + AH^2$ donc le triangle BHA est rectangle en A.
Par la trigonométrie dans le triangle rectangle, on a alors
$\cos \widehat{AHB} = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ et l'on retrouve le résultat obtenu par la méthode 1.