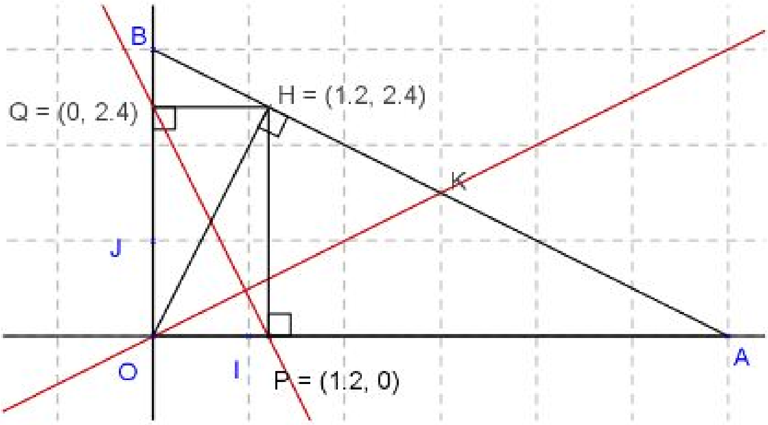
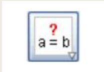
Exercice 124 Résolution détaillée

A.1. Il semble que les droites (PQ) et (OK) soient orthogonales.



Conseil

Sur GeoGebra, on peut tester une relation entre les droites (PQ) et (OK) grâce à l'outil 
Cliquer sur cet icône puis sur chacune des droites.

2. a. (AB) a pour ordonnées à l'origine $y_B = 3$ et pour coefficient directeur $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.
Donc (AB) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
La droite (OH) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\binom{-6}{3}$ ou aussi bien $\vec{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ soit $\vec{n}\binom{-2}{1}$.
Donc $M(x\,;y)$ appartient à (OH) si et seulement si $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n} = 0$ soit $x \times (-2) + y \times 1 = 0$.
Donc (OH) admet pour équation cartésienne $-2x + y = 0$.

Méthode

Pour écrire une équation de la droite (AB), on peut chercher une équation cartésienne (comme au chapitre 10 en utilisant la condition de colinéarité), ou une équation réduite.
Ici, l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) étant connue, on privilégie l'équation réduite.

b. Les coordonnées de H vérifient les équations des deux droites :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ -2x - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que H a pour coordonnées $\left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{12}{5}\right)$.

3. Le repère étant orthonormé, on a $P\left(\frac{6}{5}\,;0\right)$ et $Q\left(0\,;\,\frac{12}{5}\right)$ donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{12}{5}\end{pmatrix}$.

K étant le milieu de [AB], on a $K\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right)$ donc $K\left(3\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Par conséquent $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{OK} = -\frac{6}{5} \times 3 + \frac{12}{5} \times \frac{3}{2} = 0$.
Les droites (PQ) et (OK) sont donc orthogonales.

B.1. *Première expression*
$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car H est le projeté orthogonal de O sur (AB) donc les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Deuxième expression
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ car OPHQ est un rectangle donc
$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Or $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AO}$ car O est le projeté orthogonal de B sur (OP) et $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB}$ car O est le projeté orthogonal de A sur (OQ).
On en déduit que $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Conclusion
De $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, on déduit alors que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$,
donc $-\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$,
autrement dit $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Méthode

• il faut se laisser guider par l'énoncé et le résultat que l'on veut obtenir. Pour obtenir la relation finale, il faut faire disparaître le point H et faire apparaître les points P et Q ; on utilise donc la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$.

• On aurait aussi pu décomposer $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ pour démontrer cette relation au lieu d'utiliser les projetés orthogonaux.

2. $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{ON}$ s'écrit aussi $\left(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}\right) \cdot \overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\right) \cdot \overrightarrow{OB}$ soit

$$\underbrace{\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}}_{=0} + \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OA} = \underbrace{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}}_{=0} + \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

On a donc $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OB}$, soit $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$,

c'est-à-dire $\overrightarrow{QP} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = 0$.

Comme K est le milieu de [AB], $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{OK}$.

Donc $\overrightarrow{QP} \cdot 2\overrightarrow{OK} = 0$ ce qui revient à $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{OK} = 0$.

Les droites (QP) et (OK) sont donc orthogonales.

Conseil

La relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, vraie pour tout point M, où I est le milieu de [AB], est très utile.
Elle permet d'écrire directement l'égalité $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OK}$.
On peut la retrouver et la retenir géométriquement :
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$ où ABDC est un parallélogramme.
Le milieu I de [AB] est donc aussi le milieu de [MD] d'où
$\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$.