Exercice 122 Résolution détaillée

1. Un point $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à C si et seulement si
$\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$.
Or $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\begin{pmatrix}1-x\\1-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\begin{pmatrix}9-x\\3-y\end{pmatrix}$.
Donc $\mathrm{M}(x\,;y)$ apparient à C si et seulement si
$(1-x)(9-x)+(1-y)(3-y)=0$
soit
$x^2+y^2-10x-4y+12=0$.
Le cercle C a donc pour équation :
$x^2+y^2-10x-4y+12=0$.

Méthode

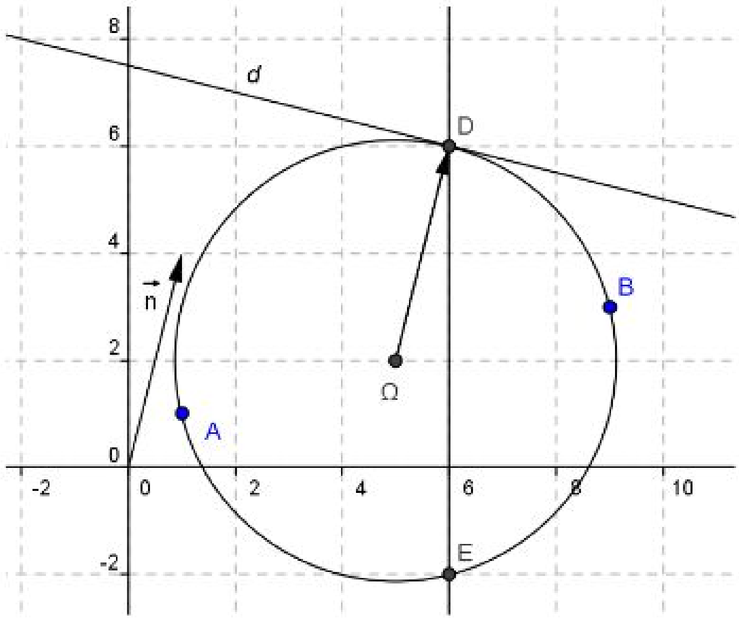
Pour déterminer une équation de cercle on dispose de deux méthodes : voir l'exercice résolu 5 page 333.

Quand on connaît un diamètre du cercle, l'utilisation de la propriété 6 page 334 est la méthode la plus rapide.

2. On cherche les points de coordonnées $(x\,;y)$ tels que
$x^2+y^2-10x-4y+12=0$ **et** $x=6$.

On résout donc (E) : $y^2-4y-12=0$.
Le discriminant de $y^2-4y-12$ est $\Delta=16-4\times(-12)=64$.
$\Delta>0$, donc l'équation (E) a deux solutions :
$y_1=\dfrac{4-\sqrt{64}}{2}=-2$ et $y_2=\dfrac{4+\sqrt{64}}{2}=6$.

Il y a donc deux points d'abscisse 6 qui appartiennent au cercle C, de coordonnées $(6\,;-2)$ et $(6\,;6)$. On a donc $\mathrm{D}(6\,;6)$.



Conseil

On fait bien sûr une figure que l'on complète au fur et à mesure de l'exercice et on y contrôle tous les résultats obtenus par le calcul.

3. a. $\vec{n}\binom{1}{4}$ est un vecteur normal à la droite d.
b. Ω est le milieu de [AB] donc ses coordonnées sont $x_\Omega=\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}$ *et* $y_\Omega=\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}=2$.
Alors $\overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}\binom{6-5}{6-2}$ soit $\overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}\binom{1}{4}$ donc $\overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}=\vec{n}$.

c. Par la question 3.b., (ΩD) est orthogonale à d. De plus le point D appartient à la droite d car ses coordonnées vérifient l'équation de d.
La droite d est donc la droite passant par le point D de C et perpendiculaire au rayon [ΩD] : c'est la tangente au cercle C en D.