

Exercice 121 Résolution détaillée

a. On utilise la formule avec les longueurs et le cosinus (propriété 11 page 336) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 2 \times \cos(120^\circ) = -3.$$

b. Le repère (O, I, J) étant orthonormé, on peut calculer le produit scalaire en utilisant l'expression du produit scalaire avec les coordonnées (définition page 330) :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5.$$

c. Le quadrillage étant orthonormé, on peut placer le projeté orthogonal de C sur (AB) ; on utilise l'expression avec le projeté orthogonal (propriété 10 page 336) :

si H désigne le projeté orthogonal de C sur (AB),

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC = -4 \times 2 = -8.$$

Remarque

On aurait aussi pu choisir un repère orthonormé lié au quadrillage et calculer ce produit scalaire avec les coordonnées.

d. On peut ici décomposer les vecteurs selon les directions des côtés du carré qui sont deux à deux orthogonales (ce qui annulera certains produits scalaires en cours de calcul) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \underbrace{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AM}}_{=0} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 + \frac{1}{2} MB^2 = 16 + \frac{1}{2} \times 64 = 48.$$

Remarque

On aurait pu choisir un repère orthonormé comme $(M; \frac{1}{8} \overrightarrow{MB}; \frac{1}{8} \overrightarrow{MP})$ et calculer ce produit scalaire avec les coordonnées.

Méthode

On choisit la méthode la plus adaptée aux données fournies par l'énoncé :

- le calcul avec les coordonnées dans un repère orthonormé (définition page 330) ;
- le calcul utilisant un projeté orthogonal (propriété 10 page 336) ;
- le calcul à l'aide de deux longueurs et du cosinus d'un angle (propriété 11 page 336) ;
- la décomposition d'un des deux vecteurs puis un développement ;
- le calcul à l'aide uniquement de normes de vecteurs (propriété 9 page 334).

Conseil

On vérifie que le signe du produit scalaire obtenu est cohérent avec la figure :

- si \widehat{BAC} est aigu, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est positif ;
- si \widehat{BAC} est obtus, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est négatif.