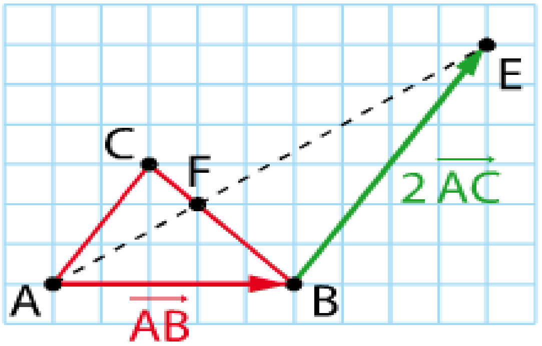
Exercice 93 Résolution détaillée



Conseil

On pourra faire une figure en utilisant le quadrillage de la feuille pour émettre une conjecture.

On va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires.

MÉTHODE VECTORIELLE

D'après l'énoncé, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Méthode

On décompose $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sur deux vecteurs non colinéaires et on cherche un réel k tel que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$ ou $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$.

Conseil

Comme $\overrightarrow{AE}$ est décomposé sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on décompose aussi $\overrightarrow{AF}$ sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

Or d'après l'énoncé, $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $3\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ puis que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et donc que les points A, E et F sont alignés.

MÉTHODE ANALYTIQUE

ABC est un triangle donc les points A, B et C ne sont pas alignés donc $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.

Dans ce repère, A(0 ;0), B(1 ;0) et C(0 ;1).

On en déduit que $\overrightarrow{AB}\binom{1}{0}$, $\overrightarrow{AC}\binom{0}{1}$ puis que $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\binom{1}{2}$.

Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ on en déduit que $\overrightarrow{AE}\binom{1}{2}$.

Méthode

On choisit un repère puis on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ dans ce repère pour montrer qu'ils sont colinéaires à l'aide de la condition de colinéarité de la propriété 1.

D'autre part, $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x_F - 1 = \frac{2}{3}(0-1) \\ y_F - 0 = \frac{2}{3}(1-0) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_F = \frac{1}{3} \\ y_F = \frac{2}{3} \end{cases}$

donc $F\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et donc $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Comme $1 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$, on en déduit que que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et donc que les points A, E et F sont alignés.