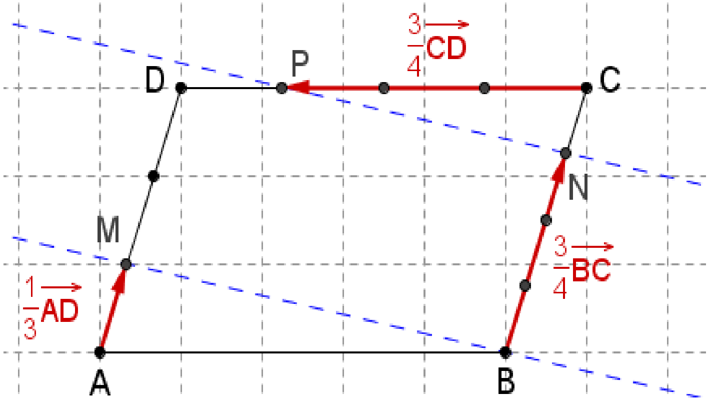
Exercice 92 Résolution détaillée

1.



Conseil

On peut utiliser le quadrillage de la feuille pour construire les représentants des vecteurs $\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

2. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$ et donc $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

De même, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$, d'où
$\overrightarrow{PN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et finalement
$\overrightarrow{PN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

Méthode

Comme dans l'exercice résolu 7, on choisit les points à introduire par la relation de Chasles en fonction de l'énoncé.

Or ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$.
On en déduit : $\overrightarrow{PN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

3. On en déduit que $3\overrightarrow{BM} = 3\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$, soit $3\overrightarrow{BM} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

De plus, $4\overrightarrow{PN} = 4\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$, soit $4\overrightarrow{PN} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

On en déduit que $3\overrightarrow{BM} = -4\overrightarrow{PN}$, soit $\overrightarrow{BM} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{PN}$.

Conseil

Multiplier $\overrightarrow{BM}$ par 3 et $\overrightarrow{PN}$ par 4 permet d'obtenir des coefficients entiers dans la décomposition, ce qui facilite la détermination de la relation de colinéarité.

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont donc colinéaires

et les droites (BM) et (PN) sont parallèles.

Méthode

Pour montrer que les droites (BM) et (PN) sont parallèles, on utilise la propriété 2.