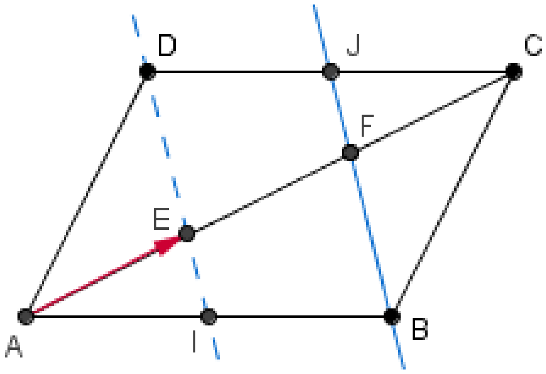
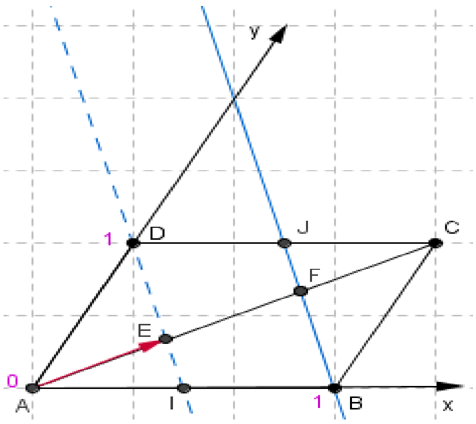
Exercice 91 Résolution détaillée

1.



2.a. Le repère est (A, B, D) donc A(0 ;0) ; B(1 ;0) et D(0 ;1).
ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. On en déduit : C(1 ;1).



> **Conseil**
>
> On peut construire les axes du repère (A, B, D) et les graduer.

b. On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. De plus, $E(x_E; y_E)$ et donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$, C(1 ;1) donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On en déduit que $E\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

I est le milieu de [AB] donc $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = 0$. On en déduit que $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.
De même, J est le milieu de [DC] donc $x_J = \frac{x_D+x_C}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_J = \frac{y_D+y_C}{2} = 1$.
On en déduit que $J\left(\frac{1}{2};1\right)$.

3. $\overrightarrow{\mathrm{IE}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{IE}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{\mathrm{ID}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{ID}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or $-\frac{1}{6} \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, donc d'après la propriété 1,les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ID}}$ sont colinéaires et les points I, E et D sont alignés.

Méthode

On utilise la méthode de l'exercice résolu 9 : pour montrer que les points I, E et D sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ID}}$ sont colinéaires.

4. a. $\mathrm{M}(x\,;y) \in (\mathrm{BJ})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BM}}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (x-1) \times 1 - y \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}y - 1 = 0.$

$x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de (BJ).

Méthode

La droite (BJ) passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$: on utilise donc la méthode de l'exercice résolu 5.

b. D'après les questions précédentes, $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{ID}}$ ont les mêmes coordonnées donc ils sont colinéaires (car égaux) et on en déduit que les droites (BJ) et (ID) sont parallèles.

Méthode

On utilise la propriété 2.

5. $\mathrm{M}(x\,;y) \in (\mathrm{AC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow x - y = 0$

$x - y = 0$ est une équation cartésienne de (AC).

6. a. $\mathrm{F}(x_{\mathrm{F}}; y_{\mathrm{F}}) \in (\mathrm{AC})$ donc $x_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{F}} = 0$, soit $x_{\mathrm{F}} = y_{\mathrm{F}}$.

On a alors $\mathrm{F}(x_{\mathrm{F}}; x_{\mathrm{F}}) \in (\mathrm{BJ})$,

donc $x_{\mathrm{F}} + \frac{1}{2}x_{\mathrm{F}} - 1 = 0$,

donc $x_{\mathrm{F}} = \frac{2}{3}$, puis $y_{\mathrm{F}} = \frac{2}{3}$.

Les coordonnées de F sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Conseil

Les coordonnées du point F doivent vérifier à la fois l'équation de (AC) trouvée en 5. et l'équation de (BJ) trouvée en 4.a.

b. Le milieu F' de [EC] a pour coordonnées

$x_{\mathrm{F}'} = \frac{x_{\mathrm{E}} + x_{\mathrm{C}}}{2} = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$ et $y'_F = \frac{y_{\mathrm{E}} + y_{\mathrm{C}}}{2} = \frac{\frac{1}{3}+1}{2} = \frac{2}{3}$,

or les coordonnées de F sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$,

donc F est le milieu de [EC].

Méthode

Pour montrer que F est le milieu de [EC], on calcule les coordonnées du milieu de [EC] et on les compare à celles de F.