Exercice 89 Résolution détaillée

1. K est le milieu de [AB] donc $K\left(\frac{-1+(-3)}{2};\frac{3+(-2)}{2}\right)$ soit $K\left(-2;\frac{1}{2}\right)$;
L est le milieu de [AC] donc $L\left(\frac{-1+5}{2};\frac{3+(-1)}{2}\right)$ soit $L(2\,;1)$;
R est le milieu de [BC] donc $R\left(\frac{-3+5}{2};\frac{-2+(-1)}{2}\right)$ soit $R\left(1;-\frac{3}{2}\right)$.

Conseil

On peut placer les points dans un repère pour vérifier les résultats.

2. MÉTHODE 1

$M(x;y) \in (BL) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\binom{x+3}{y+2}$ et $\overrightarrow{BL}\binom{5}{3}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow 3(x+3)-5(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3x+9-5y-10=0.$

On en déduit qu'une équation cartésienne de (BL) est :
$3x-5y-1=0.$

Méthode

On utilise la propriété caractéristique 6 puis la condition de colinéarité.

MÉTHODE 2

(BL) a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $\vec{u}\binom{-b}{a}$

vecteur directeur de (BL).

Méthode

On utilise la remarque donnée sous la propriété 8.

Or $\overrightarrow{BL}\binom{5}{3}$ est un vecteur directeur de (BL)
donc on peut prendre $a=3$ et $b=-5$.
(BL) a donc une équation de la forme $3x-5y+c=0$.
$B(-3\,;-2) \in (BL)$ donc $3(-3)-5(-2)+c=0$ donc $c=-1$.
On en déduit que (BL) : $3x-5y-1=0$.

3. a. Le point C appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de d : $3\times 5+14\times(-1)-1=0$ donc $C\in d$.
De même pour K :
$3\times(-2)+14\times\frac{1}{2}-1=0$ donc $K\in d$.
b. La droite d passe par le sommet C et par le milieu du côté opposé à C dans le triangle ABC, c'est-à-dire K milieu de [AB], donc d est la médiane issue C du triangle ABC.

Conseil

Tracer le triangle ABC et la droite (CK) dans le repère.

4. $G(x\,;y) \in (BL) \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y - 1 = 0 \\ 3x + 14y - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5y + 1 \\ 5y + 1 + 14y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5y + 1 \\ 19y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

On a donc $G\left(\frac{1}{3}\,;0\right)$.

Méthode

G est le point d'intersection de (BL) et d, donc ses coordonnées vérifient à la fois l'équation de (BL) trouvée au 2. et l'équation de d donnée au 3.

5. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

$\frac{4}{3} \times \left(-\frac{9}{2}\right) - (-3) \times 2 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont colinéaires, donc les points A, G et R sont alignés.

Méthode

On utilise la propriété 3.