Exercice 43 Résolution détaillée

Question a

• On peut supposer que le nombre d'abonnés sondés (300) est suffisamment petit en regard du nombre d'abonnés du fournisseur d'accès internet, pour considérer que le prélèvement au hasard des 300 abonnés s'est effectué avec remise.

On dispose donc d'un échantillon de taille 300 qui fournit une fréquence observée f du caractère « STS » égale à $f = \frac{250}{300} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$.

> ***Remarque***
> Le prélèvement au hasard d'un échantillon de taille n consiste en n répétitions d'un tirage ***avec remise***. Mais si les tirages s'effectuent ***sans remise***, l'assimilation à un échantillon de taille n est encore possible lorsque la population est suffisamment grande en regard de n.

• Par ailleurs, sous l'hypothèse que le taux de STS parmi les abonnés est « $p = 0{,}88$ » :
- le prélèvement d'un échantillon de taille 300 peut être assimilé à un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 300$ et $p = 0{,}88$
- la variable aléatoire X, qui compte le nombre de succès « l'abonné se dit STS », suit la loi binomiale B(300 ; 0,88).

On peut alors déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence du succès fourni par la loi binomiale B(300 ; 0,88).

Il s'agit de l'intervalle $\mathrm{I} = \left[\frac{a}{300}\ ;\ \frac{b}{300}\right]$,
où a et b sont les plus petits entiers tels que :

$P(X \leq a) > 0{,}025$ et $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

> **Méthode**
> Pour déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence du succès fourni par la loi binomiale $B(n\ ;\ p)$, on peut :
> – soit utiliser sa définition (Définition 6 page 250)
> – soit utiliser la détermination pratique de a et b (en bas de la page 250).

k	P(X≤k)
0	5,68E-277
1	1,25E-273
...	...
250	0,01050824
251	0,01597173
252	0,02376226
253	0,03460125
254	0,04930928
...	...
273	0,95876761
274	0,97329157
275	0,98336152
276	0,99005049
277	0,99430052
...	...

Une calculatrice ou un logiciel fournit : $a = 253$ et $b = 275$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% recherché est donc : $\mathrm{I} = \left[\frac{253}{300}\ ;\ \frac{275}{300}\right] = [0{,}843\ ;\ 0{,}917]$.

• La fréquence f du succès STS sur l'échantillon prélevé étant $f = 0{,}833$, on observe que f n'appartient pas à I et donc que l'écart entre $f = 0{,}833$ et $p = 0{,}88$ est significatif.

Au seuil de 95 %, on peut donc rejeter l'hypothèse selon laquelle le taux d'abonnés STS est égal à 0,88.
Le risque d'erreur de prendre cette décision à tord est inférieure à 5 %.

Conseil

Il importe de bien connaître la démarche conduisant à prendre une décision relative à une hypothèse (H) « $p = p_0$ » à partir de la fréquence f observée sur un échantillon.

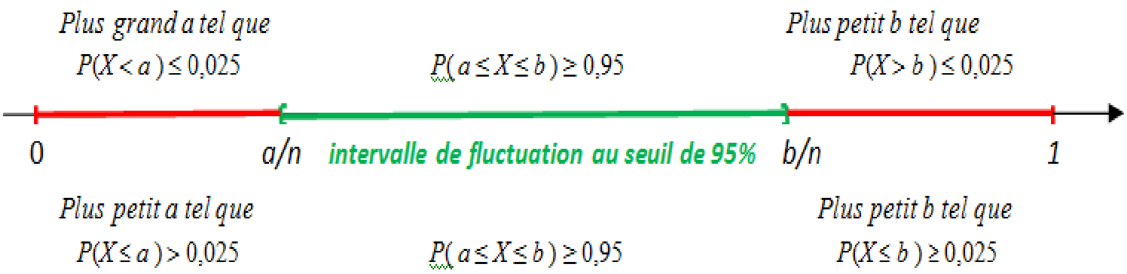
Le paragraphe C. de la page 250 en précise les étapes.

Question b

On reprend la démarche précédente, mais en fixant cette fois le seuil à 99 %.

Conseil

Pour déterminer l'intervalle de fluctuation à un seuil autre que 95 %, il convient de s'approprier la représentation de l'intervalle I_{95} et de l'adapter au seuil choisi.



• On détermine l'intervalle de fluctuation au seuil de 99 % de la fréquence du succès STS à l'aide de la loi binomiale $B(300 ; 0{,}88)$.
Pour cela, on détermine les plus petits entiers a et b tels que
$P(X \leq a) > 0{,}005$ et $P(X \leq b) \geq 0{,}995$.

Une calculatrice ou un logiciel fournit : $a = 249$ et $b = 278$.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 99% recherché est donc :
$I' = \left[\frac{249}{300} ; \frac{278}{300}\right] = [0{,}830 ; 0{,}927]$.

• On utilise à nouveau la fréquence $f = 0{,}833$ du caractère « STS » observée sur l'échantillon de taille 300 associé au sondage.
On observe que $f = 0{,}833$ appartient à I' et donc que l'écart entre $f = 0{,}833$ et $p = 0{,}88$ n'est pas significatif.

Au seuil de 99%, il n'y a donc pas lieu de mettre en doute l'hypothèse selon laquelle le taux d'abonnés STS est égale à 0,88.