## Exercice 42 Résolution détaillée

Une entreprise de vente par Internet annonce dans sa publicité que 78 % de ses clients sont satisfaits.
Lors d'une enquête auprès de 196 de ses clients, 140 se sont déclarés satisfaits.

### Question 1

**a.** L'échantillon de clients interrogés a pour taille $n = 196$ : on a bien $n \geq 30$.
La proportion de clients supposés satisfaits est $p = 0{,}78$ : on a bien $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$.
Les conditions sont donc remplies pour utiliser l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ comme intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de satisfaction sur $n$ personnes sondées.

$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}78 - \frac{1}{\sqrt{196}} \approx 0{,}708$ (valeur approchée par défaut)
$p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}78 + \frac{1}{\sqrt{196}} \approx 0{,}852$ (valeur approchée par excès)

Ainsi, à $10^{-3}$ près :

$$I = [0{,}708\,;0{,}852].$$

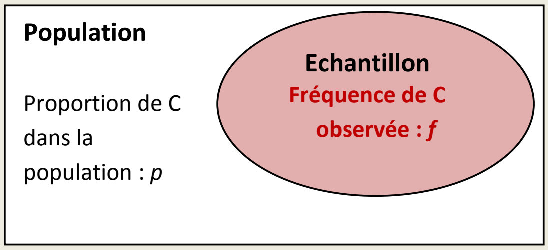
**Conseil**

Lors du calcul des bornes d'un intervalle de fluctuation d'une fréquence, il est préférable de prendre :
- Une valeur approchée par défaut de la borne inférieure de l'intervalle
- Une valeur approchée par excès de la borne supérieure de l'intervalle.

### Question 1

**b.** La fréquence $f$ de clients satisfaits lors de l'enquête est $f = \frac{140}{196} \approx 0{,}714$.
Cette fréquence observée appartient à l'intervalle I, donc on considère que l'écart entre $f$ et $p$ n'est pas significatif.
On ne peut donc pas, au seuil de 95 %, rejeter l'hypothèse que l'affirmation faite par la publicité est vraie.

**Méthode**




On fait l'hypothèse (H) qu'un caractère C est présent dans une population avec une proportion *p.*

Lorsque l'on a un intervalle I de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de C sur un échantillon de taille n, et que $f$ est la fréquence observée de ce caractère dans un échantillon de taille n prélevé au hasard :
– si $f$ n'est pas dans I, on rejette l'hypothèse (H) au risque d'erreur de 5 % ;
– si $f$ est dans I, on ne rejette pas l'hypothèse (H).

## Question 2

**a.** Soit $X$ la variable aléatoire qui compte les clients satisfaits dans un échantillon de 196 clients pris au hasard. La population étant suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise, on peut prendre pour loi de $X$ la loi binomiale $B(196\ ;\ 0{,}78)$.
Sous l'hypothèse (H) : « $p = 0{,}78$ », l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence $f$ de satisfaction sur les 196 personnes sondées, fourni par la loi binomiale, est l'intervalle

$$\left[\frac{a}{196}\ ;\ \frac{b}{196}\right]$$

où $a$ et $b$ sont les plus petits entiers tels que :
$P(X \leq a) > 0{,}025$ et $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

**Méthode**

On procède comme dans l'exercice résolu 2.

**Conseil**

Pour comprendre la signification de l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence $f$ du succès, fourni par la loi binomiale, il importe de bien connaitre sa définition (voir Définition 1 page 248) et son illustration sur un axe. Pour déterminer cet intervalle I, on peut se reporter à la détermination pratique de $a$ et $b$ qui figure en bas de la page 248.

Une calculatrice ou un tableur fournit :
$a = 141$ et $b = 164$.
Il en résulte que les bornes de l'intervalle de fluctuation recherché sont
$\frac{141}{196} \approx 0{,}791$ et $\frac{164}{196} \approx 0{,}837$

On prendra donc pour la suite : J = [0,791 ; 0,837]

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

| X | Y1 |
|---|---|
| 138 | .00799 |
| 139 | .0123 |
| 140 | .01852 |
| 141 | .02728 |
| 142 | .03931 |
| 143 | .05541 |
| 144 | .07643 |
| 145 | .10315 |
| 146 | .13624 |
| 147 | .17614 |
| 148 | .22299 |

X=141

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

| X | Y1 |
|---|---|
| 156 | .73044 |
| 157 | .78544 |
| 158 | .83357 |
| 159 | .87435 |
| 160 | .90779 |
| 161 | .9343 |
| 162 | .9546 |
| 163 | .96962 |
| 164 | .98033 |
| 165 | .9877 |
| 166 | .99258 |

X=164

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 142 | 140 | 0,018524216 | |
| 143 | 141 | 0,02728314 | |
| 144 | 142 | 0,03931124 | |
| 145 | =LOI.BINOMIALE(A143;196;0,78;1) | | |
| 146 | 144 | 0,076429134 | |
| 164 | 162 | 0,954603301 | |
| 165 | 163 | 0,96961993 | |
| 166 | 164 | 0,980333012 | |
| 167 | 165 | 0,987699363 | |
| 168 | 166 | 0,992576646 | |

### Question 2

**b.** On constate que $f$ (on a déjà calculé $f \approx 0{,}714$) n'appartient à J, ce qui amène à considérer cette fois que l'écart entre $p$ et $f$ est significatif.

On peut donc rejeter la validité de l'affirmation de la publicité, au risque d'erreur de 5 %.

**Méthode**

On procède comme dans l'exercice résolu 2.

*Remarque* : on peut s'étonner d'obtenir deux conclusions différentes suivant l'intervalle de fluctuation utilisé. L'intervalle de fluctuation vu en classe de Seconde est moins précis que celui de première qui est « calculé » à l'aide de la loi binomiale : il est donc préférable d'utiliser ce dernier.