Exercice 41 Résolution détaillée

Monsieur C, commercial doit visiter 10 clients dans une journée, de façon indépendante.
Lors d'une visite, la probabilité de rencontrer effectivement le client est égale à 0,8.
Soit X le nombre de clients effectivement rencontrés.

Question 1

L'expérience aléatoire décrite consiste à répéter 10 fois la même épreuve $\mathcal{E}$: « Monsieur C. rend visite à un client ».
Cette épreuve $\mathcal{E}$ comporte deux issues : « la rencontre a lieu » que l'on peut prendre comme succès S de probabilité 0,8 et « la rencontre n'a pas lieu » qui est l'échec de probabilité 0,2.
Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}8$.
L'expérience aléatoire qui répète cette épreuve 10 fois, de façon indépendante, se modélise donc par un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
La variable aléatoire X, qui compte les clients effectivement rencontrés (X compte les succès), suit donc la loi binomiale B (10 ; 0,8).

Conseil

Lorsque la loi de probabilité d'une variable aléatoire X s'avère être une loi binomiale, il est inutile de préciser les valeurs prises par X, ni les probabilités qui leur sont associées.
C'est la justification que le contexte s'apparente bien à un schéma de Bernoulli et que X en compte les succès qu'il convient de soigner.

Question 2

a. Sous l'hypothèse (H) : « $p = 0{,}8$ », un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence f de rencontres réussies lors des 10 visites est l'intervalle $\left[\frac{a}{10}\,;\frac{b}{10}\right]$ où a et b sont les plus petits entiers tels que :
$P(X \leq a) > 0{,}025$ et $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.
Une calculatrice ou un tableur fournit :
$a = 5$ et $b = 10$.

	A	B
1	**k**	**P(X ≤ k)**
2	0	1,024E-07
3	1	4,1984E-06
4	2	7,7926E-05
5	3	0,00086436
6	4	0,00636938
7	5	0,0327935
8	6	0,12087388
9	7	0,32220047
10	8	0,62419036
11	9	0,89262582
12	10	1

Il en résulte que l'intervalle de fluctuation cherché est $I = \left[\frac{5}{10}\,;\frac{10}{10}\right] = [0{,}5\,;1]$.

Conseil

Pour comprendre la signification de l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence f du succès, fourni par la loi binomiale, il importe de bien connaitre sa définition (voir Définition 1) et son illustration sur un axe.

Pour déterminer cet intervalle I, on peut se reporter à la détermination pratique de a et b qui figure en bas de la page 248.

b. Lors d'une journée donnée, Monsieur C. rencontre effectivement 6 clients sur les 10 prévus ; il en résulte une fréquence observée du succès f égale à 0,6.

On se demande si ce résultat peut permettre une remise en question de l'hypothèse *(H)* selon laquelle la probabilité qu'une visite conduise à une rencontre avec le client est p = 0,8.

D'après la question précédente, l'intervalle de fluctuation de la fréquence du succès fournie par la loi binomiale est I = [0,5 ; 1].

On constate que f = 0,6 appartient à I, ce qui amène à considérer que l'écart entre p= 0,8 et f = 0,6 n'est pas significatif.

La fréquence observée f = 0,6 ne permet donc pas de remettre en question l'hypothèse (H) : « p = 0,8 ».

Méthode

Dans une situation pouvant se modéliser par un schéma de Bernoulli, on fait l'hypothèse *(H)* que le succès S a pour probabilité *p.*
La variable aléatoire X qui compte les succès suit alors la loi $B(n\ ;\ p)$ et $F = \frac{X}{n}$ donne la fréquence du succès S.

Une fois que l'on a déterminé l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence du succès et que l'on a recueilli la fréquence f du succès fourni par un échantillon de taille n,
on peut prendre une décision au seuil de 95 % selon que f appartient ou non à l'intervalle I :
– si f n'est pas dans I, on rejette l'hypothèse *(H)* au risque d'erreur de 5% ;
– si f est dans I, on ne rejette pas l'hypothèse *(H)*.