Exercice 66 Résolution détaillée

Question 1

Dans un carton donné, l'expérience « « choisir un objet au hasard », » comporte deux issues : « l'objet est sans défaut » que l'on peut prendre comme succès S, et « l'objet comporte un défaut » que l'on peut prendre comme échec. La probabilité du succès est $P(S)$ =1-0,08=0,92.

Cette expérience de Bernoulli répétée 12 fois de façon indépendante, se modélise par un schéma de Bernoulli de paramètres n = 12 et $p = 0{,}92$.

Soit X la variable aléatoire qui compte les objets sans défaut ; X compte les succès, donc suit la loi binomiale B (12 ; 0,92).

Méthode

Même lorsque l'énoncé n'introduit pas de variable aléatoire, il ne faut pas hésiter à en introduire une si besoin.

Si la situation fait penser à un schéma de Bernoulli dont on compte les succès, on peut prendre l'initiative d'introduire une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

a. $P(X = 12) = 0{,}92^{12} \approx 0{,}368$: la probabilité que dans un carton le nombre d'objets sans défaut soit égal à 12 est 0,368 à 10^{-3} près.

b. On utilise la calculatrice pour calculer $P(X = 10)$.

Calculatrice TI

```
binomFdp(12,0.92,10)
                .1834856831
```

Calculatrice Casio :

```
BinominalPD(10,12,0.▶
            0.1834856831
```

Ainsi, $P(X = 10) \approx 0{,}183$: la probabilité que dans un carton le nombre d'objets sans défaut soit égal à 10 est 0,183 à 10^{-3} près.

Conseil

Pour une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $B(n\,;\,p)$, une calculatrice donne les valeurs de $P(X = k)$ pour tout k entier avec $0 \leq k \leq n$ (voir exercice résolu 7 page 217.)

c. On cherche à calculer $P(X \geq 10)$.

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$.

On utilise la calculatrice.

Calculatrice TI

```
binomFRép(12,0.92,9)
                .0651960465
```

Calculatrice Casio

```
BinominalCD(9,12,0.9▶
           0.06519604651
```

On obtient : $P(X \leq 9) \approx 0{,}065$ donc $P(X \geq 10) \approx 1 - 0{,}065$ d'où $P(X \geq 10) \approx 0{,}935$.

La probabilité que dans un carton le nombre d'objets sans défaut soit au moins 10 est 0,935 à 10^{-3} près.

Conseil

Pour calculer une valeur approchée de $P(X \geq k)$ lorsque X suit la loi $B(n\,;p)$, avec une calculatrice ou un logiciel, il peut être avantageux d'utiliser la relation $P(X \geq k) = 1 - P(X < k)$.

En effet, $P(X<k)$ qui coïncide avec $P(X \leq k-1)$ s'obtient en général directement sur une calculatrice ou un logiciel (voir exercice résolu 7).

Question 2

Le nombre d'objets non défectueux que l'on peut s'attendre à trouver en moyenne par carton est donné par l'espérance $E(X)$.
X suivant la loi $B(12 ; 0{,}92)$, on a, par propriété, $E(X) = 12\times0{,}92 = 11{,}04$.
Ainsi, on peut s'attendre à trouver en moyenne 11 objets non défectueux par carton.

Méthode

Au cours d'un grand nombre de réalisations d'un schéma de Bernoulli en n répétitions, le nombre de succès S que l'on peut s'attendre à obtenir en moyenne est fourni par l'espérance de la variable aléatoire X, soit $E(X) = np$.