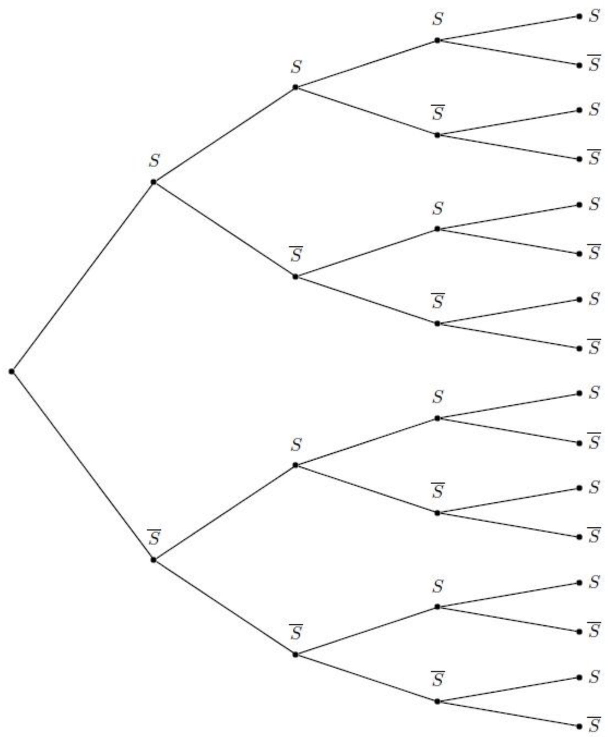
Exercice 65 Résolution détaillée

Question a. $\binom{4}{1}$ est, dans l'arbre qui illustre un schéma de 4 épreuves de Bernoulli, le nombre de chemins qui réalisent exactement 1 succès S, et donc 3 échecs $\bar{S}$.
Dans l'arbre ci-dessous, on compte 4 chemins qui réalisent exactement 1 succès S : ceux qui correspondent aux listes : $S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}S\bar{S}$ et $\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$.
On en déduit : $\binom{4}{1} = 4$.

Conseil
Il faut avoir présent à l'esprit la définition 7 du cours qui donne du sens au nombre $\binom{n}{k}$.



Méthode
Pour trouver la valeur de $\binom{n}{k}$, plusieurs démarches sont possibles, selon les valeurs de n et de k :
– lorsque n est suffisamment petit, on peut construire l'arbre illustrant un schéma de n épreuves de Bernoulli et dénombrer les chemins réalisant exactement k succès S ;
– pour certaines valeurs particulières de k, telles que 0 et 1, on peut se contenter d'imaginer l'arbre et d'en écrire les chemins réalisant k succès S ;
- Pour des valeurs de n assez grandes, on utilise un ordinateur ou une calculatrice.

Remarque sur la méthode
La valeur de k étant égale à 1, il est possible d'écrire (ou d'imaginer) seulement les chemins de l'arbre qu'il faut dénombrer, sous forme de listes de 4 symboles S ou $\bar{S}$, comprenant 1 seul S et donc 3 $\bar{S}$.
Il y a exactement 4 positions possibles pour S : en premier, en deuxième, en troisième et en quatrième. Il y a donc 4 listes possibles : $S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}S\bar{S}$ et $\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$.
Ainsi, $\binom{4}{1} = 4$.

Autres exemples

■ $\binom{15}{0}$ est le nombre de chemins de longueur 15 réalisant 0 succès S.
Or, il n'y a qu'un seul chemin répondant à ce critère, c'est $\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$.
D'où $\binom{15}{0} = 1$.

■ $\binom{15}{1}$ est le nombre de chemins de longueur 15 réalisant 1 seul succès S.
Il y a autant de chemins de ce type que de façons de positionner un unique succès S parmi les 15 symboles, soit 15 possibilités. D'où $\binom{15}{1} = 15$.

Question b. $\binom{5}{2}$ est – par définition – le nombre de chemins qui réalisent exactement 2 succès dans l'arbre illustrant un schéma de 5 épreuves de Bernoulli.

On utilise la calculatrice.

Calculatrice Casio

Calculatrice TI

Conclusion : $\binom{5}{2}$ **= 10.**

Remarque
Pour savoir si la représentation d'un schéma de n épreuves de Bernoulli par un arbre peut être envisagée, il suffit de calculer combien de branches « terminales » (ou combien de chemins) comportera cet arbre.

On compte :
2 chemins lorsque $n = 1$
2×2 chemins lorsque $n = 2$
2×2×2 chemins lorsque $n = 3$
et plus généralement 2^n chemins pour n répétitions.

Remarque sur la méthode
Lorsque $n = 5$, l'arbre comporte $2^5 = 32$ branches terminales ou encore 32 chemins, ce qui n'incite pas à le construire…

Conseil

Pour l'utilisation d'une calculatrice ou d'un logiciel, voir exercice résolu 8.

Question c. $\binom{6}{3}$ est – par définition – le nombre de chemins qui réalisent exactement 3 succès dans l'arbre illustrant un schéma de 6 épreuves de Bernoulli.
La valeur de n égale à 6 ne permet pas d'envisager la représentation du schéma de Bernoulli correspondant à n =6 par un arbre.
On utilise une calculatrice :

Conclusion : $\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \mathbf{20.}$

Question d. $\binom{8}{3}$ est – par définition – le nombre de chemins qui réalisent exactement 3 succès dans l'arbre illustrant un schéma de 8 épreuves de Bernoulli.

A l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{3}} = \mathbf{56}$