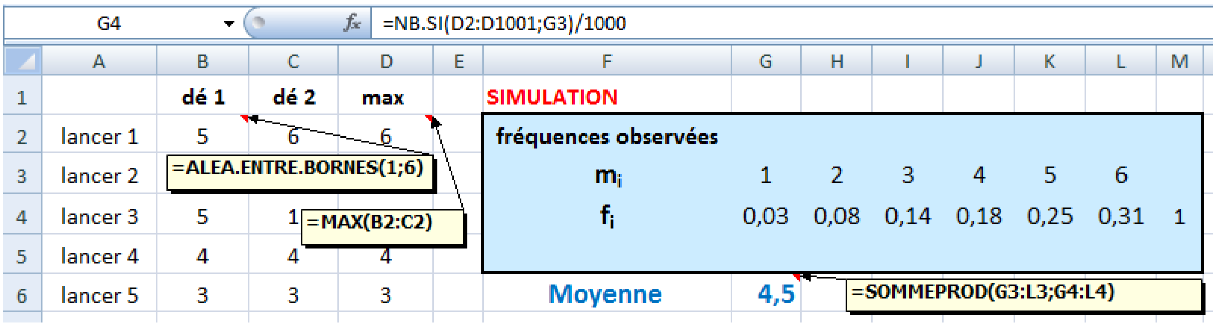
Exercice 62 Résolution détaillée

On lance deux dés cubiques supposés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le joueur gagne à chaque lancer une somme en euros égale au maximum des deux numéros sortis. La variable aléatoire M prend pour valeur le montant de ce gain.

Question 1 : simulation

La copie d'écran ci-dessous montre une feuille de tableur :
• où l'on a simulé 1 000 lancers de deux dés supposés équilibrés
• où l'on a fait afficher dans un tableau les valeurs m_i prises par la variable aléatoire M et leurs fréquences f_i
• où l'on a calculé la moyenne des valeurs prises par M sur cet échantillon de taille 1000.


G4 =NB.SI(D2:D1001;G3)/1000

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		dé 1	dé 2	max		SIMULATION							
2	lancer 1	5	6	6		fréquences observées							
3	lancer 2					m_i	1	2	3	4	5	6	
4	lancer 3	5	1			f_i	0,03	0,08	0,14	0,18	0,25	0,31	1
5	lancer 4	4	4	4									
6	lancer 5	3	3	3		Moyenne	4,5						

=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)
=MAX(B2:C2)
=SOMMEPROD(G3:L3;G4:L4)

Question 2 : modélisation

a. Loi de probabilité de M

L'expérience réalisée : lancer de deux dés supposés équilibrés et gain associé correspondant en euros au plus grand numéro sorti, peut se représenter à l'aide d'un tableau à double entrée où l'on fait figurer dans chaque case le gain du joueur.

Dé 2 / Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	(1 ;1) gain1	(1 ;2) gain2	(1 ;3) gain3	(1 ;4) gain4	(1 ;5) gain5	(1 ;6) gain6
2	(2 ;1) gain2	(2 ;2) gain2	(2 ;3) gain3	(2 ;4) gain4	(2 ;5) gain5	(2 ;6) gain6
3	(3 ;1) gain3	(3 ;2) gain3	(3 ;3) gain3	(3 ;4) gain4	(3 ;5) gain5	(3 ;6) gain6
4	(4 ;1) gain4	(4 ;2) gain4	(4 ;3) gain4	(4 ;4) gain4	(4 ;5) gain5	(4 ;6) gain6
5	(5 ;1) gain5	(5 ;2) gain5	(5 ;3) gain5	(5 ;4) gain5	(5 ;5) gain5	(5 ;6) gain6
6	(6 ;1) gain6	(6 ;2) gain6	(6 ;3) gain6	(6 ;4) gain6	(6 ;5) gain6	(6;6) gain6

Conseil

Il faut bien distinguer les 36 issues de l'expérience (résultats des deux lancers sous forme de couples (a ;b) figurant dans le tableau) des 6 valeurs prises par la variable aléatoire M.
Le modèle de l'équiprobabilité porte sur l'ensemble des 36 couples et non sur celui des 6 gains associés.

Les dés étant supposés équilibrés, on peut adopter le modèle de l'équiprobabilité sur l'ensemble des 36 issues (a ; b) de l'expérience qui correspondent aux 36 cases du tableau.

La loi de probabilité de la variable aléatoire M (qui donne le gain du joueur) découle du modèle précédent.
Par exemple : $P(M = 3) = P(\{(1 ;3) ; (2 ;3) ; (3 ;1) ; (3 ;2) ; (3 ;3)\}) = 5/36$.
On procède de même pour déterminer $P(M = k)$ pour les autres valeurs de k.
On en déduit la loi de probabilité de M présentée dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P(M=k)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

b. Calcul et interprétation de l'espérance de M

• $\mathrm{E}(M) = \sum_{k=1}^{6} k\ P(X=k) = \frac{1}{36} \times 1 + \frac{3}{36} \times 2 + \frac{5}{36} \times 3 + \frac{7}{36} \times 4 + \frac{9}{36} \times 5 + \frac{11}{36} \times 6 = 161/36$
$\mathrm{E}(M) \approx 4{,}47$.

• Sur un grand nombre de réalisations de cette expérience (lancer de deux dés supposés équilibrés et gain correspondant au plus grand des numéros obtenus), un joueur gagnerait en moyenne 4,47 € par partie.

• **Conséquence :** Le joueur pourrait accepter de donner une mise m pour participer à ce jeu, à condition qu'elle reste inférieure à 4,47 € s'il veut que le jeu lui reste favorable.