

Exercice 61 Résolution détaillée

On a copié les 13 mots de la citation de Jean Tétreau : « *Le hasard est une loi que tout le monde applique sans le savoir* » sur 13 cartons identiques que l'on a placés dans un sac. On tire au hasard l'un de ces cartons.

X est la variable aléatoire associant au carton tiré le nombre de lettres du mot inscrit.

Question 1

Déterminer la loi de probabilité de X .

- L'ensemble Ω des issues de cette expérience est l'ensemble des 13 mots de la citation. Le tirage d'un carton s'effectuant au hasard, on adopte sur Ω le modèle d'équiprobabilité (les 13 issues sont équiprobables et ont pour probabilité 1/13).

- On peut répartir les 13 issues (mots de la citation) en fonction de leur nombre de lettres :

3 mots comportent 2 lettres

4 mots comportent 3 lettres

2 mots comportent 4 lettres

1 mot comporte 5 lettres

2 mots comportent 6 lettres

1 mot comporte 8 lettres

Les valeurs prises par X sont donc :

2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8.

$$\bullet P(X=2) = P(\{\text{le ; le ; le}\}) = 3/13$$

$$P(X=3) = P(\{\text{est ; une ; loi ; que}\}) = 4/13$$

$$P(X=4) = P(\{\text{tout ; sans}\}) = 2/13$$

$$P(X=5) = P(\{\text{monde}\}) = 1/13$$

$$P(X=6) = P(\{\text{hasard ; savoir}\}) = 2/13$$

$$P(X=8) = P(\{\text{applique}\}) = 1/13$$

- La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau ci-contre.

x_i	2	3	4	5	6	8
$P(X=x_i)$	3/13	4/13	2/13	1/13	2/13	1/13

Question 2

Combien de lettres obtient-on en moyenne à ce jeu ?

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i P(X=x_i) = 51/13 \approx 3,9$$

Sur un grand nombre de répétitions de l'expérience décrite (tirage d'un carton), on peut s'attendre à obtenir en moyenne 3,9 lettres.

Méthode

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire :

- On précise l'ensemble Ω des issues de cette expérience et le modèle de probabilité sur Ω .
- On détermine l'ensemble des nombres que X associe à ces issues.
- Pour chacune des valeurs x_i prise par X , on calcule $P(X=x_i)$.
- On présente en général les couples $(x_i ; P(X=x_i))$ qui constituent la loi de probabilité de X dans un tableau.

Remarque

Cette question comporte un sous-entendu qu'il convient d'avoir en tête.

Il faut lire et comprendre : Combien de lettres obtiendrait-on en moyenne à ce jeu si l'on répétait cette expérience un grand nombre de fois ?

Et ce nombre moyen correspond à l'espérance de X .