Exercice 90 Résolution détaillée

Question 1

Calculer C_1, C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.

$C_1 = C_0 + C_0 \times \frac{2,5}{100} = C_0\left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = C_0 \times 1,025$

$C_1 = 30\,000 \times 1,025 = 30\,750.$

$C_2 = C_1 \times 1,0.25 = 31\,518,75$

Méthode

Chaque année, le capital est augmenté de 2,5% donc multiplié par 1,025.

Question 2

Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
En déduire l'expression de C_n en fonction de n.

On passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre non nul donc la suite est géométrique.

$C_{n+1} = C_n \times 1,025$ donc la suite (C_n) est géométrique de raison 1,025.

Comme son premier terme est $C_0 = 30\,000$, on en déduit que

tout entier n, $C_n = 30\,000 \times 1,025^n$.

On utilise la propriété 4 page 158 : expression du terme général d'une suite géométrique.

Question 3

a. Au 1er janvier 2020, Lucas aura besoin d'une somme de 40 000 €.
Montrer que le capital de son placement ne sera pas suffisant à cette date.

D'après l'énoncé, C_n est le capital au 1er janvier $2015 + n$ donc

le capital au 1er janvier 2020, soit $2015 + 5$, est C_5.

Etablir la relation entre n et l'année.

$C_5 = 30\,000 \times 1,025^5 \approx 33\,942,25$

Lucas ne disposera pas d'un capital supérieur ou égal à 40 000 € au 1er janvier 2020.

b. Au 1er janvier de quelle année, Lucas disposera-t-il d'un capital supérieur ou égal à 40 000 € ?

On cherche n tel que $C_n \geq 40\,000$.

A l'aide le calculatrice ou du tableur, on obtient :
$C_{11} \approx 39\,362,60$ et $C_{12} \approx 40\,346,66$.

On en déduit que Lucas disposera d'un capital supérieur ou égal à 40 000 € en 2027.

Conseil

Revoir l'utilisation de la calculatrice ou du tableur à l'aide des exercices résolus 2 page 153 et 3 page 155.

c. On souhaite écrire un algorithme permettant de trouver ce résultat. Parmi les quatre algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant.

On remarque que chacun de ces algorithmes utilise deux variables :

– la variable C qui contient les valeurs successives de la suite (C_n),

– la variable N qui compte le nombre d'années après 2015.

Conseil

Mettre en évidence les différences entre les algorithmes proposés.

• On cherche une année, ce qui élimine l'algorithme 1, qui affiche C soit un capital.

• De plus, chaque algorithme contient une boucle « tant que » avec un test sur la valeur de C. On doit rester dans la boucle tant que le capital n'est pas atteint c'est-à-dire tant que $C < 40\,000$ ce qui élimine l'algorithme 2.

• Dans l'algorithme 4, les instructions « N prend la valeur $N+1$ » et « C prend la valeur $C \times 1{,}025^N$ » signifient $C_{n+1} = C_n \times 1{,}025^{n+1}$ ce qui ne correspond pas à la suite géométrique (C_n). Pour que cet algorithme soit correct, il aurait fallu avoir comme deuxième instruction soit « C prend la valeur $C \times 1{,}025$ » (à relier à la formule par récurrence définissant la suite (C_n)) ou « C prend la valeur $30000 \times 1{,}025^N$ » (à relier à l'expression de C_n en fonction de n trouvée dans la question 2).

• L'algorithme 3 convient bien : Le test de la boucle convient et les instructions « C prend la valeur $1{,}025 \times C$ » et « N prend la valeur $N+1$ » signifient $C_{n+1} = 1{,}025 \times C_n$ ce qui correspond à la suite géométrique (C_n).

Question 4

Par la méthode de votre choix, déterminer le 1er janvier de quelle année Lucas disposera ainsi de la somme de 40 000 €. Expliquer votre démarche.

On note maintenant T_n le capital de Lucas au 1er janvier 2015 + n.
On a $T_0 = 30\,000$ car le capital de départ est identique et pour tout entier n, $T_{n+1} = 1{,}025 \times T_n + 1\,000$.

On ajoute chaque année le versement complémentaire de 1 000 €.

<u>Méthode 1 : avec la calculatrice</u>

Comme dans l'exercice résolu 3 page 155, on affiche les premiers termes de la suite (T_n) jusqu'à dépasser la valeur 40 000.

$T_5 \approx 39\,198{,}57$ et $T_6 \approx 41\,178{,}54$ donc $n = 6$ et à partir de 2021, Lucas disposera d'un capital supérieur ou égal à 40 000 €.

Méthode 2 : avec un tableur

	A	B
1	n	T_n
2	0	30 000,00
3	1	31 750,00
4	2	33 543,75
5	3	35 382,34
6	4	37 266,90
7	5	39 198,57
8	6	41 178,54

Valeurs initiales de n et de T_n

Dans la cellule A3 : =A2+1
Dans la cellule B3 : =B2*1.025+1000

Fichiers tableurs Excel ou LibreOffice disponibles sur le site.

On obtient $n = 6$ soit en 2021.

Méthode 3 : en programmant un algorithme

On modifie l'algorithme 3 :

Algorithme	Programme avec Xcas	Programme avec Algobox
N prend la valeur 0 T prend la valeur 30000 **Tant que** T < 40 000 T prend la valeur 1,025×T+1000 N prend la valeur N+1 **Fin tant que** Afficher N	N:=0; T:=30000; tantque T<40000 faire T:=1.025*T+1000; N:=N+1; ftantque; afficher(N):; N:6 (0, 30000, 6, Done)	VARIABLES N EST_DU_TYPE NOMBRE T EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME N PREND_LA_VALEUR 0 T PREND_LA_VALEUR 30000 TANT_QUE (T<40000) FAIRE DEBUT_TANT_QUE T PREND_LA_VALEUR 1.025*T+1000 N PREND_LA_VALEUR N+1 FIN_TANT_QUE AFFICHER "N= " AFFICHER N FIN_ALGORITHME

Fichiers Xcas et Algobox disponibles sur le site.

On obtient $n = 6$ soit en 2021.