Exercice 89 Résolution détaillée

Question 1

D'après le graphique, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 2{,}5$.

$u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 0{,}5$ donc $u_1 = u_0 + \mathbf{1}$ et $u_2 = u_1 + \mathbf{0,5}$
donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ donc $u_1 = \mathbf{2} \times u_0$ et $u_2 = \mathbf{1,25} \times u_1$
donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Méthode

On commence par déterminer les trois premiers termes u_0, u_1, u_2.

Si $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ alors la suite n'est pas arithmétique.

Si $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ alors la suite n'est pas géométrique.

Remarque

Les points de coordonnées $(n; u_n)$ ne sont pas alignés donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Question 2

D'après le graphique, les valeurs de u_n augmentent quand n augmente

donc la suite (u_n) semble croissante.

Le graphique ne représente que les premiers termes de la suite (u_n) donc on ne peut émettre qu'une conjecture.

Question 3.a.

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \left(3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} > 0$$

donc $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante.

Conseil

Revoir l'exercice résolu 4 page 155.

Question 3.b.

On repère dans l'expression de u_n le terme général d'une suite géométrique, ici $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ a pour raison $\frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$

donc la suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est décroissante.

On en déduit que pour tout entier n,
$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$
donc
$3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $u_{n+1} > u_n$

donc (u_n) est croissante.

On multiplie les deux membres de l'inégalité par un nombre négatif donc on **change** le sens de l'inégalité.