Exercice 90 Résolution détaillée

On a $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
On cherche les coordonnées du point A de la courbe représentative de f qui a pour abscisse 1.
$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
Le point A a pour coordonnées $(1\ ;\ \frac{1}{2})$.
$g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.
On cherche de même le point de la courbe représentative de la fonction g qui a pour abscisse 1.
$g(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.
C'est aussi le point A.

Méthode

Pour montrer que ces deux tangentes sont confondues, il suffit de montrer qu'elles ont un point commun et qu'elles ont des coefficients directeurs égaux.

Remarque

Si le point d'abscisse 1 n'avait pas été commun aux deux courbes, elles n'auraient pas pu avoir la même tangente au point d'abscisse 1.

Les coefficients directeurs des tangentes sont les nombres dérivés en 1 des fonctions f et g. On va monter que $f'(1) = g'(1)$.
On dérive f et g :
$g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}$ et $g'(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=x+1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=1$.
v est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $v'(x)=1$.
Donc f est dérivable pour tout $x \neq -1$ et
$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{1\times(x+1)-(x\times 1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ et $f'(1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Les deux tangentes ont un point commun A et le même coefficient directeur $\frac{1}{4}$.
Elles sont donc confondues.