Exercice 88 Résolution détaillée

1. $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-x+1}$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x)=5x+3$ et $v(x)=x^2-x+1$.

u et v sont deux fonction dérivables sur [-3 ;2] et $u'(x)=5$ et $v'(x)=2x-1$.

$$f'(x) = \frac{5 \times (x^2 - x + 1) - (5x + 3) \times (2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{5x^2-5x+5-(10x^2-5x+6x-3)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2-6x+8}{(x^2-x+1)^2}$$

Méthode

Pour dériver une fonction il faut identifier son modèle.

Ici, $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$

Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$, puis

utiliser la formule de dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$$

2. Pour tout $x \in [-3;2]$, $(x^2-x+1)^2$ est un carré et donc toujours positif ou nul.
On peut remarquer que le discriminant de x^2-x+1 vaut $-3<0$, donc le trinôme x^2-x+1 ne s'annule pas.
Donc $(x^2-x+1)^2 > 0$.
Ainsi le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-5x^2-6x+8$.

Méthode

Pour étudier le signe d'un trinôme du second degré, on détermine ses racines éventuelles et le signe du coefficient du terme en x^2 nous donne le tableau de signe du trinôme.

Étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier le signe de $-5x^2-6x+8$ qui est trinôme du second degré.
Son discriminant est :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-5) \times 8 = 196$
$-5x^2-6x+8 = 0$ admet deux solutions

$x_1 = \frac{6-\sqrt{196}}{-10} = \frac{6-14}{-10} = \frac{4}{5}$

et $x_2 = \frac{6+\sqrt{196}}{-10} = \frac{6+14}{-10} = -2.$

On connait alors le signe de $-5x^2-6x+8$

x	-3		x_2		x_1		2
Signe de $-5x^2-6x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On applique le théorème de stricte monotonie du cours page 122 que l'on résume dans un tableau.

x	-3		-2		$\frac{4}{5}$		2
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\frac{12}{13}$	↘	-1	↗	$\frac{25}{3}$	↘	$\frac{13}{3}$

Conseil

On contrôle la cohérence des résultats trouvés en vérifiant que l'ordre des valeurs correspond bien avec la monotonie de la fonction.
Pour $x \in [-3; 2]$, f est strictement décroissante, on doit donc avoir $f(-3)>f(-2)$.
Si ce n'est pas le cas, on vérifie que l'on ne s'est pas trompé lors de l'étude du signe de la dérivée.