Exercice 87 Résolution détaillée

1.

x	0	1	3	8
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(3)$	$f_1(8)$

a. $f_1(2) < f_1(3)$ est vraie.
On exploite le tableau de variations de la fonction f_1.
Une flèche dans le tableau de variations traduit la stricte monotonie.
De plus, la stricte croissance de la fonction f_1 sur l'intervalle [1 ;3] nous assure que pour 2 et 3 qui sont des valeurs de cet intervalle, et qui sont telles que 2<3, les images de 2 et 3 par la fonction f_1 seront telles que $f_1(2) < f_1(3)$.

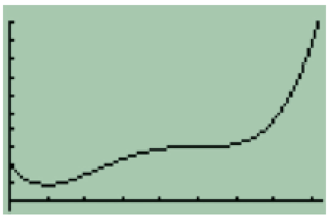
b. $f_1(4) > f_1(5)$ est vraie aussi.
4 et 5 sont des valeurs d'un même intervalle de monotonie pour la fonction f_1.
f_1 est strictement décroissante sur l'intervalle [3 ;8].
$4 < 5$ donc $f_1(4) > f_1(5)$.

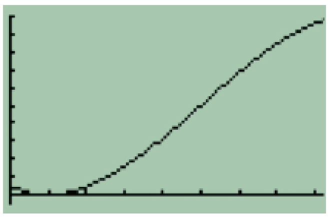
c. On ne peut pas savoir puisque 2 et 4 n'appartiennent pas à un même intervalle de monotonie de la fonction f_1.

Méthode

Pour comparer les images de deux nombres à partir d'un tableau de variations, on ne peut conclure, sans autre information, que si les nombres de départ sont dans le même intervalle de monotonie. C'est-à-dire dans un intervalle sur lequel la fonction ne change pas de variation.
Il faut donc :
• Identifier les intervalles de monotonie.
• Exploiter la définition de la croissance ou de la décroissance sur ces intervalles.

2.





Le signe de $f_2'(x)$ pour $x \in [0\,;1]$ nous permet de dire que l'on cherche une fonction qui est strictement décroissante sur [0 ;1].
C'est le cas pour les deux fonctions représentées.
f_2 est strictement croissante sur [1 ;8].

Remarque

Le fait que la dérivée s'annule ne conduit pas nécessairement à un changement de variation.
C'est pour cela que dans le théorème de stricte monotonie page 122, il est précisé : « sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où elle s'annule ».

C'est aussi le cas pour les deux fonctions représentées.
La courbe représentative de la fonction f_2 admet deux tangentes horizontales, une au point d'abscisse 1 et une au point d'abscisse 3.
C'est donc la première qui est la seule possible.

3. On dérive chacune des fonctions candidates et on étudie le signe de la dérivée obtenue

$$g'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$g'(1) = 0 \; et \; g'(3) = 27 + 18 - 9 = 36 \neq 0.$$

Dont g ne peut pas être f_1.

$$h'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$
$$h'(1) = 0 \; et \; h'(3) = -27 + 36 - 9 = 0.$$

Donc h est la seule susceptible d'être la fonction f_1.

Méthode

On peut dériver chacune des fonctions candidates et vérifier que puisqu'il y a un changement de variation pour la fonction f_1 en 1 et 3, la dérivée s'annule en 1 et 3.

Voir la remarque page 122.