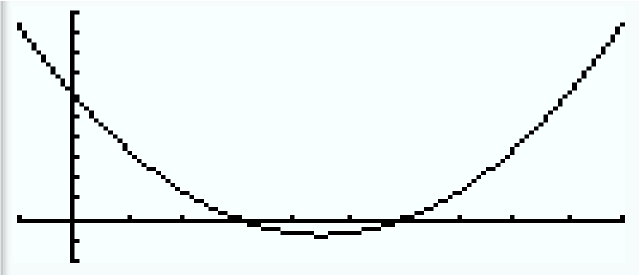
Exercice 114 Résolution détaillée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6$.



Conseil

Avant toute chose, représenter sur votre calculatrice cette fonction et prendre soin de vérifier la cohérence de chacune de vos réponses.

Question 1

$f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$
avec $a = \frac{1}{3}, b = -3$ et $c = 6$.

Méthode

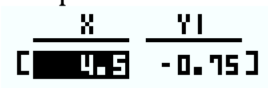
On utilise la définition de la page 30 en indiquant les valeurs de a, b et c.

Question 2

$a = \frac{1}{3}$ donc a est positif donc la parabole est orientée vers le haut.
L'abscisse x_s du sommet est donnée par la formule $x_s = -\frac{b}{2a}$ donc ici

$$x_s = -\frac{-3}{2\frac{1}{3}} = \frac{-3}{\frac{2}{3}} = -3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

L'ordonnée y_s du sommet est donnée par le calcul de $f(x_s) = f\left(\frac{9}{2}\right) = -0{,}75$.
Le sommet S a donc pour coordonnées $(4{,}5; -0{,}75)$



Utiliser la calculatrice pour ce calcul.

On a :

x	$-\infty$	$4{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-0{,}75$	↗

Question 3

On calcule le discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 6 = 1$.
$\Delta > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions que l'on obtient en appliquant les formules :
$x_1 = \frac{3-1}{\frac{2}{3}} = 3$ et $x_2 = \frac{3+1}{\frac{2}{3}} = 6$.
La parabole représentative de f coupe donc l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(3 ; 0)$ et $(6 ; 0)$.

Méthode

On utilise la propriété 2 page 32 et les méthodes de l'exercice résolu 2 page 33.

Question 4

a est positif, Δ est positif. On a :

x	$-\infty$		3		6		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vérification graphique: la parabole représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses sur les intervalles $]-\infty; 3]$ et $[6; +\infty[$. Elle est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[3; 6]$.

Méthode

On utilise la propriété 3 page 34 et les méthodes de l'exercice résolu 4 page 33.

Question 5

L'énoncé met en évidence le lien avec la précédente question ; on repère les signes « **+** » dans le tableau précédent, on a :
$f(x) \geq 0$ si $\in\ ]-\infty; 3]\ \cup [6; +\infty[$.

« + »

car on souhaite que $f(x)$ soit

Question 6 Vrai ou faux ?

Si $x \in\ ]0; 12[$ alors $f(x) \in\ ]6; 18[$

$f(0) = 6$, $f(12) = 18$.

x	0	4,5	12
$f(x)$	6 ↘	$-0{,}75$	↗ 18

Pour répondre alors à la question posée, il suffit de relever la valeur minimale et la valeur maximale de $f(x)$ lorsque $x \in\ ]0; 12[$.
Ainsi, si $x \in\ ]0; 12[$ alors $f(x) \in\ ]-0{,}75; 18[$
L'affirmation proposée est donc fausse.

Méthode

Pour encadrer $f(x)$ pour x appartenant à un intervalle donné, il faut connaitre les variations de f sur cet intervalle.