Enroulement sur le cercle

Exercice 1

D’ est le point image du réel $-\frac{2\pi}{3}$; J’ est le point image du réel $\frac{7\pi}{2}$;

F’ est le point image du réel $\frac{-5\pi}{6}$; E’ est le point image du réel $\frac{13\pi}{4}$.

Exercice 2

Les réels qui s’appliquent sur les points A’, D, E’ et I’ lorsque l’on enroule la droite numérique sur $\mathcal{C}$:

a. dans le sens direct au premier tour :
A’ est le point image du réel $\frac{11\pi}{6}$; D du réel $\frac{2\pi}{3}$; E’ du réel $\frac{5\pi}{4}$ et I’ du réel π.

b. dans le sens direct au second tour,
A’ est le point image du réel $\frac{23\pi}{6}$; D du réel $\frac{8\pi}{3}$; E’ du réel $\frac{13\pi}{4}$ et I’ du réel 3π.

c. dans le sens indirect au premier tour.
A’ est le point image du réel $-\frac{\pi}{6}$; D du réel $-\frac{4\pi}{3}$; E’ du réel $-\frac{3\pi}{4}$ et I’ du réel $-\pi$.

Cosinus et sinus d’un réel

Exercice 3

a. A’ est le point image du réel $-\frac{\pi}{6}$ dont le cosinus est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus est $-\frac{1}{2}$.
b. E’ est le point image du réel $-\frac{3\pi}{4}$ dont le cosinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le sinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
c. D est le point image de $\frac{2\pi}{3}$ dont le cosinus est $-\frac{1}{2}$ et le sinus est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
d. J’ est le point image du réel $-\frac{5\pi}{2}$ dont le cosinus est 0 et le sinus est -1.

Exercice 4

a. $\frac{4\pi}{3}$ a pour image D’ ; $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $-\frac{5\pi}{4}$ a pour image E ; $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\frac{7\pi}{6}$ a pour image F’ ; $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

d. $\frac{10\pi}{3}$ a pour image D’ ; $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e. $2011\pi = 1005\times(2\pi) + \pi$. Il a pour image I’ ;
$\cos(2011\pi) = -1$; $\sin(2011\pi) = 0$.

f. $\frac{1}{2}\times 2011\pi = 502\times(2\pi) + \frac{3\pi}{2}$. Il a pour image J’ ;
$\cos\left(\frac{1}{2}\times 2011\pi\right) = 0$; $\sin\left(\frac{1}{2}\times 2011\pi\right) = -1$.

Exercice 5

a. Le point à placer est confondu avec A et $x = \frac{\pi}{6}$.

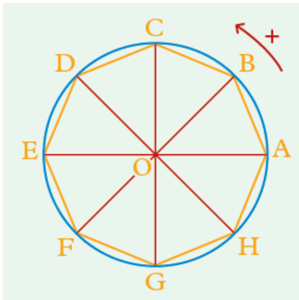
b. Le point à placer est confondu avec E’ et $x = \frac{5\pi}{4}$.

c. Le point à placer est confondu avec D et $x = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 6

A est l’image de $-\frac{\pi}{6}$; $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
B est l’image de $-\frac{5\pi}{6}$; $\cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
J est l’image de $\frac{\pi}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 7



1. Les réels de $]-\pi\,;\pi]$ qui ont pour images les points A, B, C, D, E, F, G, H sont respectivement :
pour A : 0 ; pour B : $\frac{\pi}{4}$; pour C : $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;
pour D : $\frac{3\pi}{4}$; pour E : π ; pour F : $-\frac{3\pi}{4}$;
pour G : $-\frac{\pi}{2}$; pour H : $-\frac{\pi}{4}$.

2. Les réels que $[0\,;2\pi]$ qui ont pour images les points A, B, C, D, E, F, G et H sont respectivement :
pour A : 0 ; pour B : $\frac{\pi}{4}$; pour C : $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;
pour D : $\frac{3\pi}{4}$; pour E : π ; pour F : $\frac{5\pi}{4}$;
pour G : $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$; pour H: $\frac{7\pi}{4}$.

3. a. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. $\sqrt{2}\cos x = -1$ équivaut à $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Les réels x correspondant sont ceux qui ont pour images D ou F.
Les réels x de $\left[-\pi;\pi\right]$ tels que $\sqrt{2}\cos x = -1$ sont donc $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

b. $\sqrt{2}\sin x = -1$ équivaut à $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Les réels x de $[0\,;2\pi[$ tels que sont ceux qui ont pour images F ou H.
Ce sont donc $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

Exercice 8

1. Soit $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{6}$.

a. $\cos a = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\cos b = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $a + b = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Donc $\cos(a+b) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

c. $\cos a + \cos b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(a+b) = 0$ donc $\cos a + \cos b \neq \cos(a+b)$.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

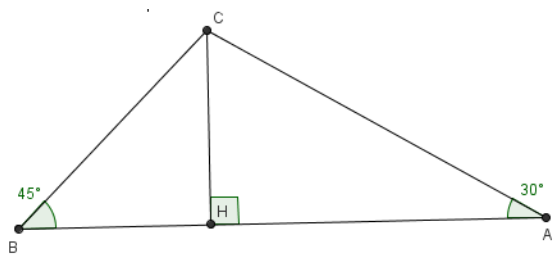
Exercice 9

1. On considère la proposition : « si $t > \frac{\pi}{3}$, alors $\sin t > \sin\frac{\pi}{3}$ ».
Trouver, si possible, un réel $t \in [0\,;\pi]$ tel que :
a. Pour $t = \frac{\pi}{2}$, la proposition est vraie.
En effet on a bien $t > \frac{\pi}{3}$ et comme $\sin t = 1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) < 1$, on aussi $\sin t > \sin\frac{\pi}{3}$
b. Pour $t = \pi$, la proposition soit fausse.
En effet on a bien $t > \frac{\pi}{3}$, mais comme $\sin t = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$, on n'a pas $\sin t > \sin\frac{\pi}{3}$

2. On considère la proposition : « si $t < \frac{\pi}{3}$, alors $\sin t < \sin\frac{\pi}{3}$ ».
a. Pour $t = 0$, la proposition est vraie
b. Pour $t = -\frac{3\pi}{2}$, la proposition est fausse.

Cosinus et Sinus d'un angle : valeurs remarquables

Exercice 10



Dans le triangle BHC rectangle en H :

$\cos 45° = \frac{\mathrm{BH}}{2}$ d'où $\mathrm{BH} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

$\sin 45° = \frac{\mathrm{CH}}{2}$ d'où $\mathrm{CH} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

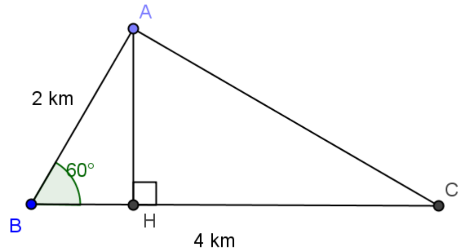
Dans le triangle CHA rectangle en H :

$\sin 30° = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}}$ d'où $\mathrm{CA} = \frac{\mathrm{CH}}{\sin 30} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

$\cos 30° = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{CA}}$ d'où $\mathrm{AH} = \mathrm{CA} \times \cos 30° = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

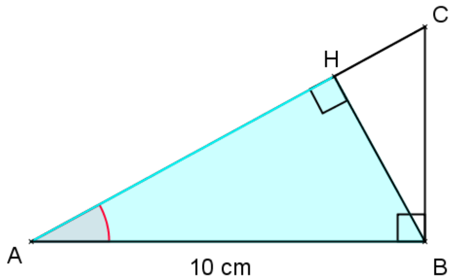
Conclusion : $\mathrm{BA} = \mathrm{BH} + \mathrm{HA} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Exercice 11



Soit [AH] la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Les longueurs seront exprimées en km.
Dans le triangle ABH rectangle en H :
• $\sin\widehat{B} = \frac{AH}{AB}$ d'où $AH = AB \times \sin 60°$,
soit $AH = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
• $\cos\widehat{B} = \frac{BH}{AB}$ d'où $BH = AB \times \cos 60°$,
soit $BH = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
De $BC = 4$ et $BH = 1$, on déduit que $CH = 3$.
Par le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H :
$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 3 + 9 = 12$. Par conséquent $AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ km.

Exercice 12



1. Le triangle ABC est rectangle en B donc son aire est égale à

$\frac{1}{2} AB \times CB = \frac{1}{2} \times 10 \times CB = 5\ CB$.

Or dans le triangle ABC rectangle en B,

$\tan\widehat{A} = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{10}$.

Par conséquent $CB = 10\tan\widehat{A}$ et $\text{aire}(ABC) = 50\tan\widehat{A}$.

2. L'aire du triangle ABH est $\frac{1}{2} AH \times HB$ puisque le triangle est rectangle en H.

Dans ABH rectangle en H : $\cos\widehat{A} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{10}$ et $\sin\widehat{A} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{10}$.

Donc $AH = 10\cos\widehat{A}$, $BH = 10\sin\widehat{A}$ et $\text{aire}(ABH) = 50\sin\widehat{A} \times \cos\widehat{A}$

3. L'aire du triangle ABH est égale au quart de celle du triangle ABC si et seulement si

$50\sin\widehat{A} \times \cos\widehat{A} = \frac{1}{4} \times 50\tan\widehat{A}$ ce qui s'écrit encore $\sin\widehat{A} \times \cos\widehat{A} = \frac{1}{4}\tan\widehat{A}$

Or $\tan\widehat{A} = \frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$.

Donc

$$\sin\widehat{A} \times \cos\widehat{A} = \frac{1}{4}\tan\widehat{A} \Leftrightarrow \sin\widehat{A} \times \cos\widehat{A} = \frac{1}{4}\frac{\sin\widehat{A}}{\cos\widehat{A}} \Leftrightarrow 4\sin\widehat{A} \times (\cos\widehat{A})^2 = \sin\widehat{A}$$

Comme ABC est un vrai triangle, $\sin\widehat{A} \neq 0$ donc

$$\sin\widehat{A} \times \cos\widehat{A} = \frac{1}{4}\tan\widehat{A} \Leftrightarrow 4(\cos\widehat{A})^2 = 1 \Leftrightarrow (\cos\widehat{A})^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos\widehat{A} = \frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2}.$$

Comme $\hat{A}$ est un angle aigu, $\widehat{A} = 60°$.