**1. a.** Il s'agit de vérifier que l'on a bien $239 \equiv 5\ (13)$ et $239 \equiv 1\ (17)$.

Or $239 - 5 = 234 = 13 \times 18$, donc $239 - 5$ est un multiple de 13 ce qui signifie que 239 et 5 sont congrus modulo 13.

De même, $239 - 1 = 238 = 17 \times 14$ ; $239 - 1$ étant un multiple de 17, 239 et 1 sont congrus modulo 17.

*Remarque*

On aurait aussi pu effectuer la division euclidienne de 239 par 13 pour montrer que le reste est 5 ($239 = 13\times18 + 5$ avec $0 \leq 5 < 13$), ainsi que la division euclidienne de 239 par 17 ($239 = 17\times14 + 1$ avec $0 \leq 1 < 17$) pour montrer que le reste est 1.

**b.** On a vu à la question précédente que $239 \equiv 5\ (13)$ et $239 \equiv 1\ (17)$

Alors $N \equiv 5 (13) \Leftrightarrow N \equiv 239\ (13) \Leftrightarrow N - 239 \equiv 0\ (13)$

De même, $N \equiv 1 (17) \Leftrightarrow N \equiv 239\ (17) \Leftrightarrow N - 239 \equiv 0\ (17)$

Donc $\begin{cases} N \equiv 5\ (13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N - 239 \equiv 0\ (13) \\ N - 239 \equiv 0\ (17) \end{cases}$ ce qui équivaut à $N - 239$ est multiple de 13 et de 17.

Ainsi, $N$ est solution du système $\begin{cases} N \equiv 5\ (13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$ si et seulement si $N - 239$ est multiple de 13 et de 17.

**c.** ▪ Si $\begin{cases} N \equiv 5\ (13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$, alors $N - 239$ est multiple de 13 donc il existe un entier $k$ tel que $N - 239 = 13k$.

De même il existe un entier $h$ tel que $N - 239 = 17h$.

Alors $13k = 17h$ donc 13 divise $17h$.

Comme 13 et 17 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, 13 divise $h$ donc $h = 13 \times h'$ pour un entier $h'$.

Alors $N = 239 + 17 \times 13 \times h' = 18 + 221(h' + 1) \equiv 18\ (221)$.

▪ Réciproquement, si $N \equiv 18\ (221)$ alors $N = 18 + 221k$ , donc $N - 1 = 17(1 + 13k)$ et $N - 5 = 13(1 + 17k)$, donc $N \equiv 1\ (17)$ et $N \equiv 5\ (13)$.

On a donc démontré l'équivalence demandée :

$N$ est solution du système $\begin{cases} N \equiv 5\ (13) \\ N \equiv 1\ (17) \end{cases}$ si et seulement si $N \equiv 18\ (221)$.

**2.** A chaque passage dans la boucle Tantque… Fin Tantque, $n$ est multiplié par 10 et $k$ augmente de 1.

On peut dresser le début du tableau d'état des variables au fur et à mesure de l'exécution de l'algorithme :

| | $k$ | $n$ | Test |
|---|---|---|---|
| Initialisation | 1 | 10 | |
| Test reste$(n,17) \neq 1$ | | | oui |
| 1er passage dans la boucle | 2 | $10^2$ | |
| Test reste$(n,17) \neq 1$ | | | oui |
| 2nd passage dans la boucle | 3 | $10^3$ | |
| Test reste$(n,17) \neq 1$ | | | oui |
| 3e passage dans la boucle | 4 | $10^4$ | |
| etc. | | | |

On sort de la boucle quand le reste de la division de $n$ par 17 est 1 et dans ce cas, la variable k contient la valeur 16 par énoncé.

Ceci signifie que $10^{16}$ est le premier entier de la forme $10^k$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) dont le reste dans la division par 17 est 1.

**b.** On sait par la question 1.c. que $10^\ell \equiv 18\ (221)$ si et seulement si $10^\ell \equiv 5\ (13)$ et $10^\ell \equiv 1\ (17)$.

Or la suite des restes dans la division de $10^k$ par 13 commence par :

| $k$ | Reste dans la division de $10^k$ par 13 |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 9 |
| 3 | 12 |
| 4 | 3 |
| 5 | 4 |
| 6 | 1 |
| 7 | 10 |

*Remarque*
Pour passer d'un reste au suivant, il suffit de multiplier ce reste par 10 puis de prendre le reste du produit obtenu dans la division par 13.

De $10^6 \equiv 1\ (13)$, on déduit que $10^{6m} \equiv 1\ (13)$ pour tout entier $m$.

Donc le reste dans la division de $10^n$ par 13 pourra être :

1 (si $n$ est de la forme $6m$)
10 (si $n$ est de la forme $6m+1$)
9 (si $n$ est de la forme $6m+2$)

12 (si $n$ est de la forme $6m+3$)

3 (si $n$ est de la forme $6m+4$)
4 (si $n$ est de la forme $6m+5$)

mais jamais ce reste ne sera égal à 5.

On en déduit qu'il n'existe pas d'entier $\ell$ tel que $10^\ell \equiv 5\ (13)$ et donc qu'il n'existe pas d'entier $\ell$ tel que $10^\ell \equiv 18\ (221)$.