**1. a.** On peut faire quelques essais :

$$A(2) = 17,\ A(3) = 82,\ A(4) = 257,\ A(5) = 626.$$

Il semble que A($n$) soit pair quand $n$ est impair et qu'il soit impair quand $n$ est pair.

Démontrons-le (en admettant connaître la parité de $n^2$ selon la parité de $n$):

*1er cas* : si $n$ est pair, $n^2$ est pair donc $(n^2)^2 = n^4$ est pair et par suite, A($n$) est impair

*2e cas* : si $n$ est impair, $n^2$ est impair donc $(n^2)^2 = n^4$ est impair d'où A($n$) est pair.

*Remarque*

On peut le justifier rigoureusement à l'aide des congruences.

*1er cas* : si $n$ est pair, $n \equiv 0\ (2)$ donc $n^4 \equiv (2)$ et $A(n) \equiv 1\ (2)$, donc A($n$) est impair.

*2e cas* : si $n$ est impair, $n \equiv 1\ (2)$ donc $n^4 \equiv 1\ (2)$ et $A(n) \equiv 2(2) \equiv 0(2)$, donc A($n$) est pair.

**b.** Dire que $d$ divise A($n$), c'est dire que $A(n) \equiv 0\ (d)$ c'est-à-dire $n^4 + 1 \equiv 0\ (d)$.

On en déduit que $n^4 \equiv -1\ (d)$ donc $(n^4)^2 \equiv (-1)^2 (d)$ ce qui s'écrit $n^8 \equiv 1\ (d)$.

**2. a.** •Effectuons comme suggéré par l'énoncé la division euclidienne de $k$ par $s$. Comme $s \neq 0$, on peut diviser $k$ par $s$ :
$k = sq + r$ avec $0 \leq r < s$, avec $q$ et $r$ entiers naturels.

*Remarque*

On nous demande de démontrer que $s$ divise $k$, ceci revient donc à démontrer que $r = 0$.

• Examinons les renseignements que l'on peut en déduire sur les puissances de $n$ :

On a donc $n^k = n^{qs+r} = n^{qs} \times n^r = (n^s)^q \times n^r$.

Or par définition de $s$, $n^s \equiv 1\ (d)$, donc $(n^s)^q \equiv 1^q\ (d) \equiv 1\ (d)$.

Par conséquent $n^k$ congru à $n^r\ (d)$.

Or par hypothèse sur $k$, $n^k \equiv 1 (d)$.

On en déduit donc que $n^r \equiv 1\ (d)$.

• Montrons que $r = 0$

Supposons que $r \neq 0$.

On a montré que $n^r \equiv 1\ (d)$ donc $r$ est l'un des exposants $h$ entiers naturels non nuls tels que $n^h \equiv 1\ (d)$.
Alors de la définition de $s$, qui est le plus petit de ces exposants $h$ non nuls, on déduit que $s \leq r$.

Mais $r$ étant le reste dans une division euclidienne par $s$, on a $r < s$.

On arrive donc à une contradiction.

On en déduit que $r = 0$, c'est dire que $k = qs + 0 = qs$ avec $q$ entier naturel.

Autrement dit, $s$ divise $k$.

**b.** Par la question 1.b., on sait que $n^8 \equiv 1(d)$. Donc 8 est l'un des entiers naturels $k$ non nuls tels que $n^k \equiv 1\ (d)$.

De la question 2.a., on déduit donc que $s$ divise 8.

**c.** Raisonnement analogue à celui de la question précédente avec $d-1$ à la place de 8.

**3.** Soit $p$ un diviseur premier de A($n$).

Par la question 1.b., $n^8 \equiv 1$ ($p$) et par la question 2, $s$ est un diviseur positif de 8 donc $s$ est égal à 1, 2, 4 ou 8.

• Examinons les cas $s = 1$, $s = 2$, $s = 4$

De $n^s \equiv 1(p)$ on déduit que si $s = 1$, $n \equiv 1(p)$ ; si $s = 2$, $n^2 \equiv 1$ ($p$) ;

si $s = 4$, $n^4 \equiv 1$ ($p$).

Dans ces quatre cas, on a $n^4 \equiv 1$ ($p$) donc A($n$) $\equiv 2(p)$.

Or $p$ est un diviseur premier de A($n$) donc A($n$) $\equiv 0$ ($p$).
On en déduit que $2 \equiv 0$ ($p$) donc que $p = 2$.

Dans ce cas, A($n$) étant divisible par $p = 2$, est pair.

Or par hypothèse $n$ est pair, donc par la question 1.a., A($n$) est impair.

On arrive à une contradiction.

On en déduit donc que $s$ n'est égal ni à 1, ni à 2, ni à 4.

Par conséquent $s = 8$.

• Montrons que $p \equiv 1(8)$.

Par la question 2.c., on sait que $s$ divise $p-1$. Donc 8 divise $p-1$.

Par conséquent $p - 1 \equiv 0$ (8) ou encore $p \equiv 1$ (8).

**4.** On est dans le cadre d'application de la question 2 puisque $n = 12$ est pair et on cherche les diviseurs premiers de A(12).

On sait donc qu'un diviseur premier de A(12) est congru à 1 modulo 8.

On teste donc les nombres premiers congrus à 1 modulo 8 proposés, à la calculatrice :

A(12) n'est divisible ni par 17, ni par 41, ni par 7, mais est divisible par 89 :

A(12) = 20 737 = 89×233.

Montrons que 233 est premier : on vérifie que 233 n'est divisible par aucun des entiers premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{233} \approx 15{,}2$ car il n'est divisible ni par 2, par 3, par 5, par 7, par 11, par 13.

On peut donc en conclure que les diviseurs premiers de A(12) sont 89 et 233.