Partie A

Pour montrer que 1999 est premier, il suffit de montrer qu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{1999} \approx 44,...$ qui sont fournis dans la liste à la fin de l'exercice.
Le raisonnement s'appuie sur la propriété suivante :

Soit n un entier, $n \geq 2$.
Si n est premier, alors il existe un diviseur premier de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

La contraposée de cette propriété est :

Soit n un entier, $n \geq 2$.

Si aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ ne divise n, alors n est premier.

Il s'agit donc d'un raisonnement par contraposition.

Partie B

1. 3 est solution si et seulement si $3^2 - S\times 3 + 11994 = 0$ soit
$9-3S + 11\,994 = 0$. Ceci n'est vrai que si $S = 4\,001$.

L'équation s'écrit alors $n^2 - 4001\,n + 11994 = 0$.

En résolvant cette équation de degré 2, on trouve comme deuxième solution 3 998.

2. 5 est solution de (E) si et seulement si $5^2 - S\times 5 + 11994 = 0$.
Ceci équivaut à $5S = 11\,999$. Cette équation n'a pas de solution entière car 11999 n'est pas divisible par 5.

Il n'existe donc pas d'un entier S tel que 5 soit solution de l'équation (E).

3. Si un entier n est solution de (E), $n^2 - Sn + 11994 = 0$ donc
$11\,994 = Sn - n^2 = n(S - n)$.

Or S étant un entier, n et $S - n$ sont des entiers. Donc n est un diviseur de 11 994.

Pour connaître les diviseurs de 11 994, on peut le décomposer en produit de facteurs premiers :

$11\,994 = 2\times 5\,997 = 2\times3\times1999$ avec 2, 3 et 1999 premiers (voir partie A).
Donc 11 994 admet 8 diviseurs positifs (ce sont les $2^a\times3^b\times1999^c$ où a, b et c prennent les valeurs 0 ou 1).
On ne déduit que les diviseurs de 11 994 sont : 1, 2, 3, 6, 1 999, 3 998, 5 997, 11 994 avec $11\,994 = 1\times 11\,994 = 2\times 5\,997 = 3\times 3\,998 = 6\times 1\,999$.

On étudie alors chaque cas :

Pour $n = 1$ ou 11 994, on a $S = 11995$.

Pour $n = 2$ ou 5 997, on a $S = 5\,999$.

Pour $n = 3$ ou 3 998, on a $S = 4\,001$.

Pour $n = 6$ ou 1 999, on a $S = 2\,005$.