1. a. Phase de recherche : on commence par faire des essais.

Pour $n = 0$, $7^n = 1$ donc le reste dans la division par 9 est 1.

Pour $n = 1$, $7^1 = 7$ et le reste dans la division par 9 est 7.

Pour $n = 2$, $7^2 = 49$ et le reste dans la division par 9 est 4.

Pour $n = 3$, $7^3 = 7^2 \times 7$ donc $7^n \equiv 7^2 \times 7\ (9)$ soit $7^n \equiv 4 \times 7\ (9) \equiv 1\ (9)$.

Comme $0 \leq 1 < 9$, le reste dans la division de 7^3 par 9 est 1.

En multipliant par 7 à chaque étape, on obtient les restes suivants : 7; 4; 1; 7;4;1; etc…

Solution
$7^2 = 49$ donc $7^2 \equiv 4\ (9)$ car $49 = 9 \times 5 + 4$.
$7^3 = 7^2 \times 7$ donc $7^3 \equiv 4 \times 7\ (9) \equiv 1\ (9)$ car $4 \times 7 = 28 = 9 \times 3 + 1$.

Donc pour tout entier naturel k, $(7^3)^k \equiv 1^k\ (9) \equiv 1\ (9)$.

Tout entier naturel n a pour reste 0,1 ou 2 dans la division par 3 donc s'écrit sous la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ avec k entier naturel.

- **Si $n = 3k$:** $7^n \equiv 1\ (9)$ avec $0 \leq 1 < 9$, donc le reste dans la division euclidienne de 7^n par 9 est 1.

- **Si $n = 3k+1$:** $7^{3k+1} \equiv 7^{3k} \times 7\ (9) \equiv 1 \times 7\ (9) \equiv 7\ (9)$ avec $0 \leq 7 < 9$ donc le reste dans la division de 7^n par 9 est 7.

- **Si $n = 3k+2$:** $7^{3k+2} \equiv 7^{3k+1} \times 7\ (9) \equiv 49\ (9) \equiv 4\ (9)$ avec $0 \leq 4 < 9$ donc le reste dans la division de 7^n par 9 est 4.

b. Vérifions que $2005 \equiv 7\ (9)$:
$2005 - 7 = 1998 = 9 \times 222$ donc $2005 \equiv 7\ (9)$.

Par conséquent $2005^n \equiv 7^n (9)$ pour tout entier naturel n.

Or si $n = 2005$, on a $2005 = 3 \times 667 + 1$ donc n est de la forme $3k + 1$.

Par conséquent $7^{2005} \equiv 7 (9)$.

On en déduit que $2005^{2005} \equiv 7 (9)$.

2. Voir la solution de l'exercice résolu 7 question 2 page 23.

3. a. Dans la question 2, on a montré qu'un nombre entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9. Par conséquent A est congru à B modulo 9.

Puis de même B est congru à C modulo 9, et enfin C est congru à D modulo 9.

On a donc $A \equiv B\ (9) \equiv C(9) \equiv D(9)$ d'où $A \equiv D\ (9)$.

b. Comme $2005 < 10\,000$, on a $2005 < 10^4$ donc $2005^{2005} < (10^4)^{2005}$ c'est-à-dire $2005^{2005} < 10^{8020}$.

Or 10^{8020} s'écrit avec un 1 suivi de 8020 zéros. C'est donc le plus petit entier s'écrivant avec 8021 chiffres. Comme 2005^{200} est strictement inférieur à 10^{8020}, il s'écrit avec au plus 8020 chiffres.

Chaque chiffre de A est inférieur ou égal à 9. Donc la somme des chiffres de A est une somme de chiffres tous inférieures ou égaux à 9, en nombre inférieur ou égal à 8020. On en déduit que cette somme est inférieure ou égale à $8020 \times 9 = 72\,180$, c'est-à-dire $B \leq 72\,180$.

c. On reprend le même principe : comme $B \leq 72\,180$, B s'écrit avec au plus 5 chiffres, tous inférieurs ou égaux à 9. Donc la somme des chiffres de B est inférieure ou égale à 5×9 c'est-à-dire $C \leq 45$.

d. De même D est la somme des chiffres de C qui est un entier inférieur ou égal à 45. La plus grande somme des chiffres d'un entier inférieur ou égal à 45 est obtenue pour 39, et elle est alors égale à 12. Donc $D \leq 12$.

e. On a montré que $A \equiv D\ (9)$ en question 3a. On a aussi montré que $A \equiv 7\ (9)$ en question 1b. On en déduit que $D \equiv 7\ (9)$.

De la question précédente, on déduit alors que D est un entier congru à 7 modulo 9 et inférieur ou égal à 12.

Il n'y a qu'un entier vérifiant ces deux conditions, c'est 7. On en déduit que $D = 7$.