

Chapitre 2 AP3 Partie IV

Des fonctions continues partout mais dérivables nulle part

Les réponses seront données par lecture graphique.

1. a. Créer sur GeoGebra la fonction f définie par $f(x) = 2x$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $f(x) = 2 - 2x$ si $x > \frac{1}{2}$.

b. Cette fonction est-elle continue sur \mathbb{R} ? Est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

2. a. Créer sur GeoGebra la fonction définie par $g(x) = f(x - E(x))$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Expliquer l'allure de la courbe.

Saisie: $g(x)=f(x-\text{floor}(x))$

b. Cette fonction est-elle continue sur \mathbb{R} ? Est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

3. On considère pour tout entier $n \geq 0$, la fonction h_n définie sur \mathbb{R} par $h_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g(2^k x)}{2^k}$.

a. Quelle est la fonction h_0 ? Ecrire $h_1(x)$ et $h_2(x)$ sans le symbole Σ .

b. Sur GeoGebra, créer un curseur n qui varie de 0 à 10 et ne prend que des valeurs entières. Régler n à 0. Ne plus faire afficher les courbes représentant les fonctions f et g .

b. Créer la fonction h_n par l'instruction :

Saisie: $h_n(x) = \text{Somme}[\text{Séquence}[g(2^k x) / 2^k, k, 0, n], n + 1]$

4. a. La fonction h_0 est-elle continue sur $[0 ; 1]$? En combien de réels de $[0 ; 1]$ n'est-elle pas dérivable ?

b. Régler n à 1 et reprendre la question a pour h_1 . Puis pour h_2, h_3, h_4, h_5 .

c. Observer les courbes représentant les fonctions h_6, \dots, h_{10} . Quelle conjecture peut-on faire sur la continuité de la fonction h_n sur $[0 ; 1]$? Sur les réels de $[0 ; 1]$ où h_n n'est pas dérivable ?

Et en allant plus loin ...

Le graphique ci-contre est obtenu sur Xcas pour $n = 35$.

Plus n augmente, plus on constate de problèmes de dérivabilité ; la fonction reste pourtant continue sur $[0 ; 1]$.

Quand n tend vers $+\infty$, on peut imaginer que l'on obtient comme « limite » une fonction continue sur \mathbb{R} mais dérivable nulle part.

On ne peut bien sûr pas la représenter graphiquement.

