

## Chapitre 2 AP3 Partie IV

### Des fonctions continues partout mais dérivables nulle part

Les réponses seront données par lecture graphique.

1. a. Créer sur GeoGebra la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x$  si  $x \leq \frac{1}{2}$  et  $f(x) = 2 - 2x$  si  $x > \frac{1}{2}$ .  
b. Cette fonction est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ? Est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

2. a. Créer sur GeoGebra la fonction définie par  $g(x) = f(x - E(x))$   
où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ . Expliquer l'allure de la courbe.

Saisie: **g(x)=f(x-floor(x))**

- b. Cette fonction est-elle continue sur  $\mathbb{R}$  ? Est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

3. On considère pour tout entier  $n \geq 0$ , la fonction  $h_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{g(2^k x)}{2^k}$ .

- a. Quelle est la fonction  $h_0$  ? Ecrire  $h_1(x)$  et  $h_2(x)$  sans le symbole  $\Sigma$ .

- b. Sur GeoGebra, créer un curseur  $n$  qui varie de 0 à 10 et ne prend que des valeurs entières.  
Régler  $n$  à 0. Ne plus faire afficher les courbes représentant les fonctions  $f$  et  $g$ .

- b. Créer la fonction  $h_n$  par l'instruction :

Saisie: **h\_n(x)=Somme[Séquence[g(2^k x) / 2^k, k, 0, n], n + 1]**

4. a. La fonction  $h_0$  est-elle continue sur  $[0 ; 1]$  ? En combien de réels de  $[0 ; 1]$  n'est-elle pas dérivable ?

- b. Régler  $n$  à 1 et reprendre la question a pour  $h_1$ . Puis pour  $h_2, h_3, h_4, h_5$ .

- c. Observer les courbes représentant les fonctions  $h_6, \dots, h_{10}$ . Quelle conjecture peut-on faire sur la continuité de la fonction  $h_n$  sur  $[0 ; 1]$  ? Sur les réels de  $[0 ; 1]$  où  $h_n$  n'est pas dérivable ?

#### Et en allant plus loin ...

Le graphique ci-contre est obtenu sur Xcas pour  $n = 35$ .

Plus  $n$  augmente, plus on constate de problèmes de dérivabilité ; la fonction reste pourtant continue sur  $[0 ; 1]$ .

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on peut imaginer que l'on obtient comme « limite » une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  mais dérivable nulle part.

On ne peut bien sûr pas la représenter graphiquement.

