1. a. Une production hebdomadaire est constituée de x calculatrices C_1 entraînant un coût de $6x$ euros et de y calculatrices C_2 entraînant un coût de 8y euros. Donc $c = 6x + 8y$.

De même $t = x + 1{,}5y$.

On a donc $\begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soit Y = AX avec A = $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

b. Le déterminant de la matrice A est $6 \times 1{,}5 - 1 \times 8 = 1$, non nul, donc A est inversible et (propriété 3 page 130), $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

De Y = AX on déduit que $A^{-1}Y = A^{-1}AX$ donc $A^{-1}Y = X$.

Pour $c = 8400$ et $t = 1450$, on a $Y = \begin{pmatrix} 8400 \\ 1450 \end{pmatrix}$ et par conséquent

$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8400 \\ 1450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \times 8400 - 8 \times 1450 \\ -1 \times 8400 + 6 \times 1450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 300 \end{pmatrix}$.

Pour un coût total de 8 400 € et une durée totale de 1 450 h de travail, on a donc produit 1 000 calculatrices C_1 et 300 calculatrices C_2.

2. On peut suivre la même démarche que dans la question 1.

▪ On exprime le nombre d'unités u, v, w respectivement de U, de V et de W consommées pour la fabrication de x produits A, y produits B et z produits C : $u = 3x + 2y$; $v = x + 2y + z$ et $w = 2x + y + z$.

▪ On traduit ce système à l’aide de matrices :

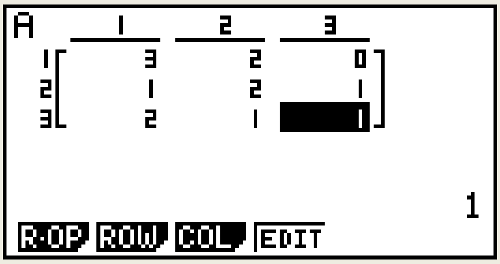
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

soit Y = AX avec Y = $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

▪ On peut chercher à la calculatrice l’inverse de A si la matrice A est inversible.

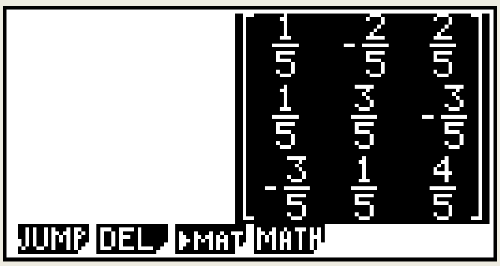
On entre A (voir aides page 127 pour TI 83 et Casio Graph 35 +) puis on calcule A^{-1} :

Par exemple, sur Casio Graph 35 +

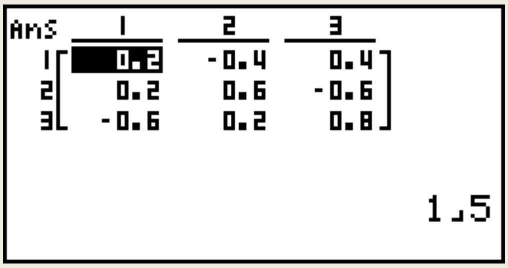


On tape ensuite 

ce qui donne :



puis en validant par EXE, on obtient :



On a donc A inversible avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Comme à la question 1, de Y = AX, on déduit que X = A^{-1} Y.

Pour un stock de 18 unités U, 9 unités V et 10 unités W, à utiliser intégralement, on a Y = $\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$.

On peut alors entrer Y sur la calculatrice et calculer $A^{-1}Y$ ce qui donne

X = $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On aurait donc $x = 4, y = 3$ et $z = -1$ soit 4 unités de U, 3 unités de V et … -1 unité de W, ce qui est impossible. Il est donc impossible de trouver une production qui épuise complètement le stock donné.

Remarque

Pour poursuivre le calcul de $A^{-1}Y$ de tête, il est plus simple de garder l'écriture fractionnaire des coefficients de A^{-1} et de mettre $\frac{1}{5}$ en facteur : A^{-1} = = $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ d'où

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 18-18+20 \\ 18+27-30 \\ -54+9+40 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'effectuer le produit de matrices sur des matrices ayant des coefficients entiers ce qui simplifie nettement le calcul de ce produit.